

Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Beschreibende Statistik“

Materialien aus dem Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

BS-R1 „Arithmetisches Mittel und Median“ (MA).....	3
BS-R2 „Durchschnitt von österreichischen Schulnoten“ (MO)	4
BS-R3 „Ausreißer“ (MA)	5
BS-R4 „Durchschnittsgehälter“ (MO).....	6
BS-R5 „Bestands- und Bewegungsdaten“ (MO)	8
BS-R6 „Stabdiagramme?“ (MA).....	10
BS-R7 „Interesse für Politik“ (MO).....	12
BS-R8 „Wozu Zentralmaße?“ (KO)	14
BS-R9 „Plädoyer für/gegen die Beschreibende Statistik“ (PE).....	15

Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind.

Vier Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über mathematische Eigenschaften mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) und über mathematische Zusammenhänge innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen, vor allem aber außermathematischen Situationen.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken darüber, welche Bedeutung (Wichtigkeit, Relevanz) die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat.

BS-R1 „Arithmetisches Mittel und Median“ (MA)

Aufgabenstellung

Arithmetisches Mittel und Median

Für einen bestimmten Datensatz ist das arithmetische Mittel (deutlich) größer als der Median.

Was sagt dies über die Verteilung der Daten aus?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler sollten durch entsprechendes Nachdenken (allenfalls an selbst gewählten Beispielen) herausfinden, dass in diesem Fall die Daten „rechtsschief“ liegen – und vielleicht können einige von ihnen diese hier erkannte Asymmetrie der Verteilung auch mathematisch präzisieren (zB: „*Das arithmetische Mittel der oberen Hälfte der Daten weicht vom Median stärker ab als das arithmetische Mittel der unteren Hälfte der Daten – daher liegt das arithmetische Mittel aller Daten über dem Median*“).

Je nach Präzisierung der Antwort (zB im obigen Sinn), bedarf es eines mehr oder weniger tiefgehenden Reflexionsprozesses. Darüber hinaus ist aber auch das Ergebnis (für die hier recht allgemein formulierte Fragestellung) als nachhaltiges Reflexionswissen sehr nützlich.

Position im Unterricht

Die beiden Zentralmaße müssen im Unterricht bereits behandelt worden sein (Definitionen, Beispiele). Der Einsatz dieser Reflexionsaufgabe erscheint am sinnvollsten im Rahmen eines umfassenden Vergleichs der beiden Zentralmaße.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Die Aufgabenstellung wird zunächst von jedem Schüler bzw. jeder Schülerin allein bearbeitet, die Überlegungen werden schriftlich festgehalten.

Anschließend erfolgt ein Austausch der Antworten mit einem Partner bzw. einer Partnerin, die beiden einigen sich auf eine Teamfassung, die ebenfalls schriftlich notiert wird.

Die Lehrperson sammelt die Teamfassungen ab, sichtet sie und geht (in der folgenden Stunde) im Plenum auf einige ausgewählte Antworten ein.

BS-R2 „Durchschnitt von österreichischen Schulnoten“ (MO)

Aufgabenstellung

Durchschnitt von österreichischen Schulnoten

Warum ist das arithmetische Mittel kein geeignetes Zentralmaß für Schulnoten?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler sollten anhand mehrerer entsprechender Reflexionserfahrungen dafür sensibilisiert werden, dass die Anwendung statistischer Verfahren stets eine bestimmte „Datenqualität“ erfordert – und dass man sich dessen stets vergewissern sollte. Im vorliegenden Fall sollten die Schülerinnen und Schüler durch entsprechendes Nachdenken erkennen (und begründen können), warum das arithmetische Mittel nur auf metrische Daten anwendbar ist, und sie sollten durch entsprechende Reflexion ebenso erkennen (und begründen können), warum die österreichischen Schulnoten eben nicht metrisch skaliert (sondern nur ordinalskaliert) sind.

Hier ist das Ergebnis der Reflexionsschritte als Reflexionswissen relevant, es erscheint aber auch wichtig, den Reflexionsprozess selbst als paradigmatisch für ähnliche Situationen zu verinnerlichen.

Position im Unterricht

Zur Bearbeitung der Reflexionsaufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler die Definition des arithmetischen Mittels kennen und sollten bereits Erfahrungen mit unterschiedlich skalierten Daten (nominalskaliert, ordinalskaliert, metrisch skaliert) gesammelt haben.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum (Vernissage)

Die Fragestellung wird in Gruppen von zwei bis vier Personen diskutiert. Die Gruppen werden aufgefordert, aus ihren Diskussionsergebnissen einen kurzen schriftlichen Beitrag für die Schulzeitung zu verfassen und diesen auf einem Din A4 Blatt/Kärtchen festzuhalten. Diese Beiträge werden von der Lehrperson bis zur folgenden Stunde gesichtet, schriftlich kommentiert und danach von den Gruppen überarbeitet. Die finalisierten Beiträge werden dann (mindestens zwei Wochen) im Klassenzimmer (zur Diskussion untereinander wie auch gegebenenfalls mit anderen Lehrpersonen) ausgestellt.

BS-R3 „Ausreißer“ (MA)

Aufgabenstellung

Ausreißer

Warum ist es nicht angemessen/möglich bei nichtmetrischen nominal- oder ordinalskalierten Daten von Ausreißern zu sprechen?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die Aufgabenstellung erfordert zunächst eine Reflexion darüber, was einen Ausreißer überhaupt ausmacht (etwa großer Abstand zu den ansonsten weitgehend dicht liegenden Daten) und dann Überlegungen, warum solche Eigenschaften nur metrischen Daten zugerechnet werden können.

Reflexionsprozess und Reflexionswissen scheinen in diesem einfachen Fall in gleicher Weise relevant.

Position im Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler müssen den Begriff des Ausreißers wie auch die Bedeutung der Begriffe metrisch, nominalskaliert und ordinalskaliert kennen.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum

Die Aufgabenstellung wird zunächst zu zweit bearbeitet.

Anschließend bilden je zwei Teams eine Vierergruppe. Die Gruppe diskutiert die Teamergebnisse und einigt sich auf eine Gruppenantwort, die sie schriftlich festhält.

Zwei bis vier Gruppen präsentieren (freiwillige Zumeldungen) ihre Gruppenantworten. Sollte von keiner Gruppe eine relevante Begründung angeführt werden, wird sich die „Gruppe Lehrperson“ (freiwillig) zu Wort melden.

BS-R4 „Durchschnittsgehälter“ (MO)

Aufgabenstellung

Durchschnittsgehälter

In der folgenden Tabelle sind das arithmetische Mittel und der Median der Bruttogehälter der Angestellten (insgesamt und getrennt für Frauen und Männer) in Österreich im Jahre 2021 dargestellt:

Bruttogehälter der österr. Angestellten im Jahre 2021 (in €)			
	<i>insgesamt</i>	<i>Frauen</i>	<i>Männer</i>
<i>arithm. Mittel</i>	42.956,-	31.034,-	57.182,-
<i>Median</i>	35.302,-	26.953,-	49.642,-

Quelle: STATISTIK AUSTRIA, Allgemeiner Einkommensbericht 2022, Lohnsteuer und SV-Daten.
Erstellt am 20. 12. 2022

- Warum ergibt der Durchschnitt der Bruttogehälter der Angestellten bei einer Modellierung mittels arithmetischem Mittel deutlich andere Werte als bei einer Modellierung mittels Median?
- Das arithmetische Mittel der in obiger Tabelle angegebenen durchschnittlichen Bruttogehälter von Frauen und Männern beträgt $\text{€} \frac{31034+57182}{2} = \text{€} 44.108,-$.
Das arithmetische Mittel der Bruttogehälter aller Angestellten insgesamt wird in obiger Tabelle jedoch mit € 42.956,- angegeben.
Was könnte der Grund für diesen Unterschied sein?
Welcher der beiden Werte erscheint dir angemessen(er)? Begründe.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Zu wissen, ob und in welcher Weise sich die Asymmetrie/Schiefe einer Verteilung (im Sinne von „Das arithmetische Mittel der oberen Hälfte der Daten weicht vom Median stärker/schwächer ab als das arithmetische Mittel der unteren Hälfte der Daten“) auf die Lagebeziehung zwischen arithmetischem Mittel und Median auswirkt, ist nützliches Reflexionswissen.

Nützliches, ja erforderliches Reflexionswissen ist auch die Kenntnis darüber, wann das gewichtete arithmetische Mittel dem einfachen arithmetischen Mittel vorzuziehen ist und warum.

Reflexionsprozesse, die solch wichtiges Reflexionswissen herstellen, sind im Hinblick auf ein tiefergehendes Verständnis wie auch im Hinblick auf die angestrebte Nachhaltigkeit des Wissens nützlich.

Position im Unterricht

Die beiden Zentralmaße arithmetisches Mittel und Median müssen im Unterricht bereits behandelt worden sein (Definitionen, Beispiele – auch angewandte).

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Gruppenarbeit

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zunächst die Aufgabenstellung zu zweit und notieren ihre Antworten. Danach tauschen sie ihre Ergebnisse in einer Vierergruppe aus. Eine gemeinsame Gruppenantwort wird schriftlich festgehalten und abgegeben. Die Lehrperson kommentiert schriftlich diese Ausarbeitungen.

Die schriftlichen Kommentare der Lehrperson sollten in einer weiteren Gruppenarbeitsphase von der Gruppe zur Kenntnis genommen werden und allenfalls zu einer Überarbeitung der schriftlichen Gruppenantwort führen.

BS-R5 „Bestands- und Bewegungsdaten“ (MO)

Aufgabenstellung

Bestands- und Bewegungsdaten

Bestandsdaten und Bewegungsdaten werden häufig in einem Liniendiagramm dargestellt. Bei den in Abb. 1 dargestellten Bevölkerungszahlen handelt es sich um ein Beispiel für Bestandsdaten, bei den in Abb. 2 dargestellten Geburtenzahlen um Bewegungsdaten.

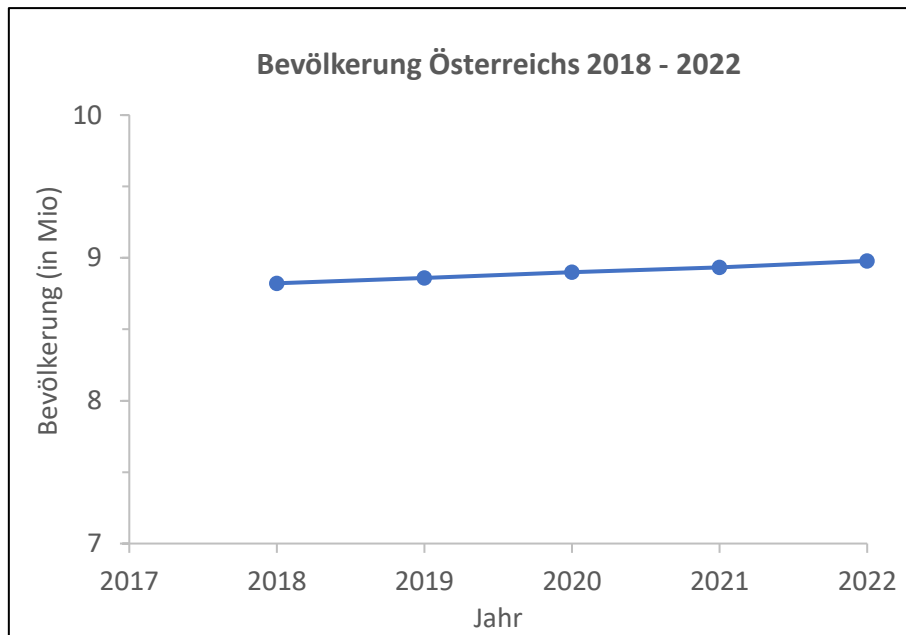


Abb. 1

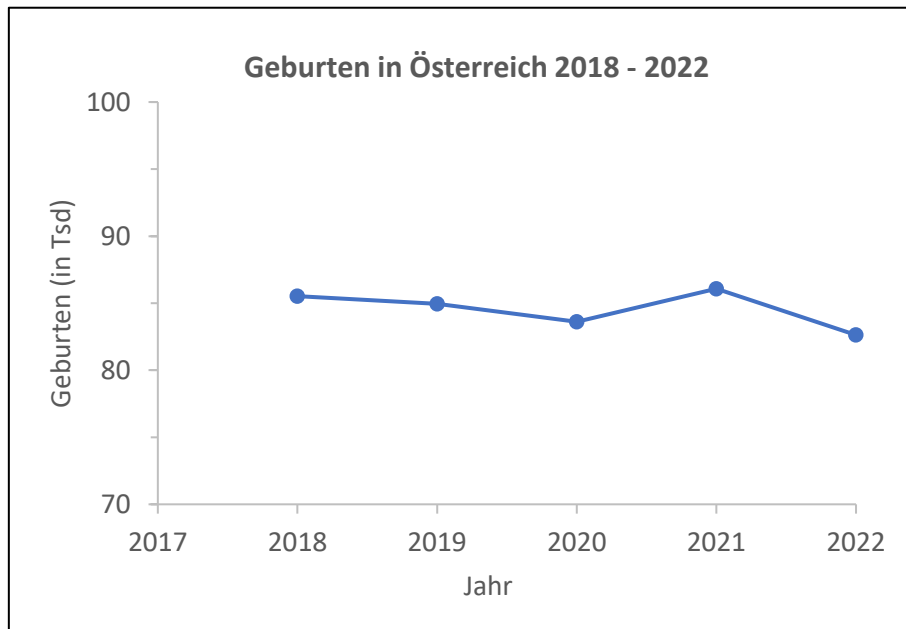


Abb. 2

Die Verbindungslinien lassen sich in den beiden Liniendiagrammen nicht in gleicher Weise (sinnvoll) interpretieren.

Erläutere, welche Aussagen anhand der beiden Liniendiagramm jeweils möglich sind.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler sollen anhand entsprechender Reflexionen erkennen, dass sich bei Bestandsdaten (Bevölkerungsentwicklung) alle Punkte der Verbindungslinien quantitativ interpretieren lassen (wobei zwischen zwei Messpunkten eine gleichmäßige Entwicklung unterstellt wird). Im Falle der Bewegungsdaten (Geburtenzahlen) erlauben die Punkte der Verbindungslinien hingegen keine (im Kontext) sinnvolle quantitative Interpretation, sondern verweisen lediglich auf eine gegenüber dem vorangegangenen Messzeitraum steigende, fallende oder gleichbleibende Tendenz zwischen zwei Messwerten.

Bei der Interpretation von Liniendiagrammen ist der Rückgriff auf derartiges Reflexionswissen unverzichtbar, ein verständiger Reflexionsprozess stützt die Nachhaltigkeit dieses Wissens.

Position im Unterricht

Die Reflexionsaufgabe kann im Rahmen der Behandlung von Liniendiagrammen (zB Zeitreihen) eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zunächst zu zweit die Aufgabenstellung und notieren ihre Antworten. Danach tauschen sie ihre Ergebnisse in einer Vierergruppe aus. Eine gemeinsame Gruppenantwort wird schriftlich festgehalten und abgegeben. Die Lehrperson sichtet die Antworten der Gruppen und geht in der folgenden Stunde im Plenum auf einzelne Schüler(innen)antworten ein. Die Gruppen überarbeiten gegebenenfalls ihre verschriftlichten Gruppenantworten.

BS-R6 „Stabdiagramme?“ (MA)

Aufgabenstellung

Stabdiagramme?

Folgende zwei Diagramme¹ wurden in einem älteren Bericht zur Entwicklung des Tourismus in Europa gefunden:

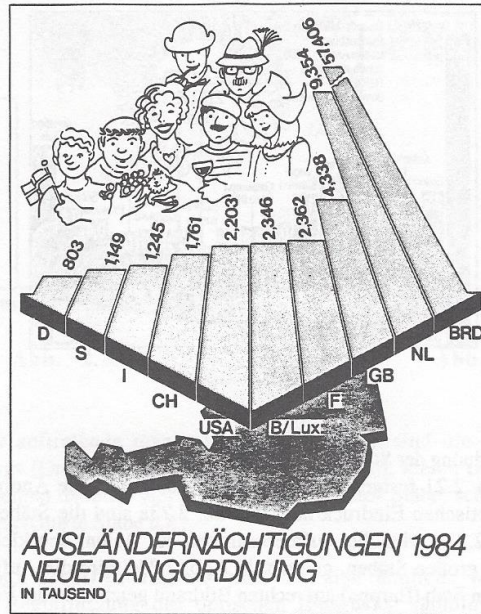


Abb. 1

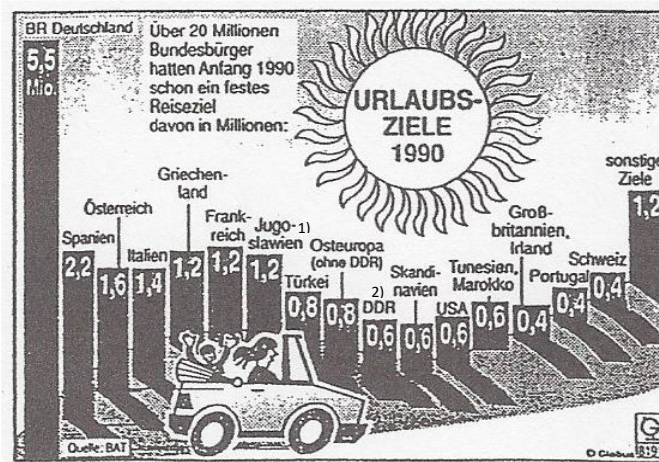


Abb. 2

- ¹⁾ Jugoslawien: Staat bis 2003; int. anerkannte Nachfolgestaaten: Kroatien Bosnien-Herzegowina, Serbien, Montenegro, Nordmazedonien, Slowenien
- ²⁾ Deutsche Demokratische Republik; 1990 Vereinigung BRD und DDR

Die beiden Diagramme vermitteln den Eindruck, dass es sich um Stabdiagramme handeln könnte.

Welche Merkmale eines Stabdiagramms erfüllen diese Diagramme nicht?

¹ aus: Kröpfl, B.; Peschek, W.; Schneider, E.; Schönlieb, A. (1999): Angewandte Statistik. Eine Einführung für Wirtschaftswissenschaftler. Hanser: München, Wien. S. 23 (Abb. 1) und S. 24 (Abb.2).

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Was sind wesentliche oder unverzichtbare (Konstruktions-)Merkmale eines Stabdiagramms? Welche dieser Konstruktionsmerkmale wurden in den hier vorliegenden Grafiken nicht berücksichtigt bzw. verletzt?

Welche Gestaltungsmaßnahmen lenken in den beiden Grafiken von den darzustellenden Informationen ab, verzerren bzw. manipulieren diese?

Welche quantitativen Informationen könnte man diesen Grafiken entnehmen, wenn es keine Zahlenangaben gäbe? (Wie gut) Erfüllen die Grafiken ihren statistischen Zweck?

Die Schülerinnen und Schüler sollten angehalten werden und lernen, derartige Reflexionen bei jeder statistischen Grafik anzustellen und dies nicht nur bei der Interpretation vorliegender Grafiken, sondern entsprechend auch bei der Erstellung von statistischen Grafiken.

Es stehen bei dieser Aufgabe also entsprechende Reflexionsprozesse im Fokus, darüber hinaus kann es aber durchaus hilfreich sein, einige der bei dieser Aufgabe identifizierten generellen Einsichten als Reflexionswissen verfügbar zu haben.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann sinnvoll entweder bei der Einführung des Stabdiagramms oder im Rahmen der Behandlung von Manipulationsmöglichkeiten statistischer Grafiken eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Bearbeitung der Aufgabenstellung erfolgt in kleinen Gruppen (drei bis vier Personen). Die Gruppenergebnisse werden im Plenum besprochen. Die Lehrperson notiert die genannten Merkmale (zB Tafel, Powerpoint o. Ä.) und ergänzt sie gegebenenfalls. Die Schülerinnen und Schüler ergänzen ihre eigenen Aufzeichnungen.

BS-R7 „Interesse für Politik“ (MO)

Aufgabenstellung

Interesse für Politik

An einer politischen Diskussionsveranstaltung in einer österreichischen Kleinstadt nahmen 140 Personen teil. Vier Statistiker(innen) haben die Altersverteilung der Teilnehmerinnen und Teilnehmer dieser Veranstaltung grafisch dargestellt:

Statistiker A:

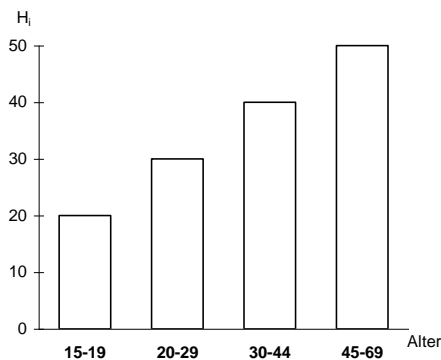


Abb. 1

Statistikerin B:

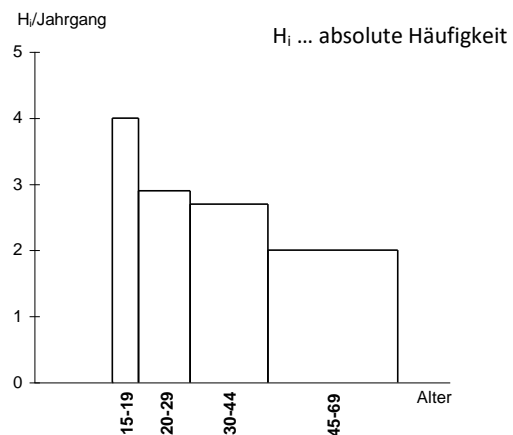


Abb. 2

Statistiker C:

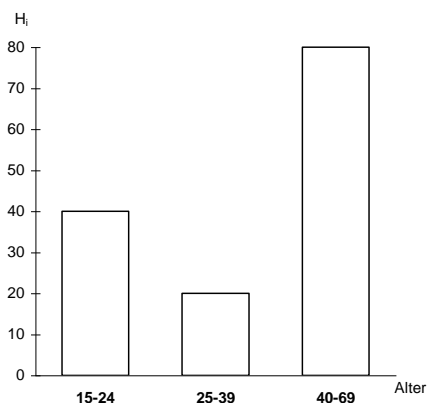


Abb. 3

Statistiker D:

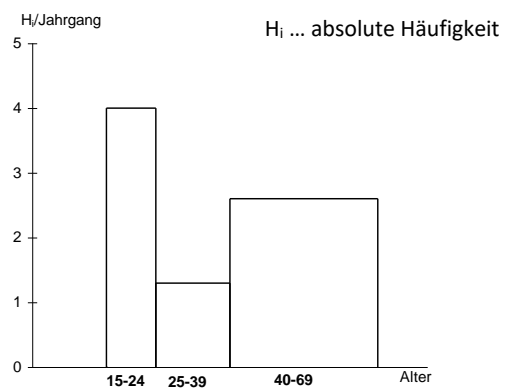


Abb. 4

Es ist anzunehmen, dass allen vier Statistiker(inne)n dieselben Daten zur Verfügung standen.

Wie kannst du (dir) erklären, dass die Altersverteilung in den vier Diagrammen derart unterschiedlich erscheint?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Seitens der Schülerinnen und Schüler sollte darüber nachgedacht und dargelegt werden, was das jeweilige Konstruktionsprinzip der Grafiken war, welche Arten von Grafiken verwendet wurden, was jeweils durch die Rechteckshöhen bzw. Rechtecksflächen dargestellt wird und wie sich die Unterschiede im Eindruck (speziell zwischen A und C, A und B bzw. C und D sowie zwischen B und D) erklären lassen.

Herangehensweise (Reflexionsprozess) wie auch nachhaltige Einsichten (Reflexionswissen) sind für das verständige „Lesen“ wie auch für das eigene Erstellen statistischer Grafiken bedeutsam.

Position im Unterricht

Die Aufgabenstellung wird für den Einsatz in der Oberstufe vorgeschlagen.

Den Schülerinnen und Schülern müssen Stabdiagramme und Histogramme bekannt sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Die Aufgabenstellung wird mit einer Partnerin bzw. einem Partner bearbeitet.

Die Ergebnisse werden im Plenum besprochen: Die Lehrperson bittet ein Team, den von ihnen herausgearbeiteten Vergleich von zwei Grafiken (etwa von A und C) zu präsentieren. Andere Teams kommentieren und bringen abweichende Überlegungen ein, die Lehrperson interveniert bei Fehlinterpretationen. Man einigt sich auf wesentliche Aspekte des Vergleichs, die dann jede Schülerin/jeder Schüler notiert.

Dann wird der nächste Vergleich in den Blick genommen, ein anderes Team beginnt usw.

BS-R8 „Wozu Zentralmaße?“ (KO)

Aufgabenstellung

Wozu Zentralmaße?

Die Schülerinnen und Schüler (d)einer Klasse bekommen von ihren Eltern ein monatliches Taschengeld von durchschnittlich € 50,-.

Welchen Vorteil hat die Angabe eines Zentralmaßes gegenüber der Angabe aller einzelnen Daten, welchen Nachteil hat es?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Kontextorientierte Reflexion

Schülerinnen und Schülern sollten jedenfalls erkennen und wissen (Reflexionsprozess und Reflexionswissen), dass Zentralmaße übersichtlich und quasi repräsentativ für einen ganzen (auch sehr großen) Datensatz sein wollen und (somit) relevante Vergleiche zwischen Datensätzen auch unterschiedlicher Größe ermöglichen.

Nachteile gegenüber dem kompletten Datensatz ergeben sich aufgrund des Verlusts an Information, zB über die Streuung der Daten, über Ausreißer, Schiefe etc.

Interessant wäre eine für Mittelwerte, Median und Modus differenzierte Betrachtung.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte erst eingesetzt werden, wenn den Schülerinnen und Schülern bereits mehrere Zentralmaße bekannt und aus bzw. in Anwendungen vertraut sind. Die globale Idee der Raffung hingegen sollte (zumindest für Zentralmaße) im Unterricht besser noch nicht explizit besprochen worden sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler setzen sich zunächst allein mit der Fragestellung auseinander und halten ihre Überlegungen schriftlich fest. In Gruppen (ca. vier Personen) werden diese ausgetauscht und diskutiert, gegebenenfalls weiterentwickelt und Ergebnisse schriftlich festgehalten.

Im Plenum werden die verschiedenen Überlegungen dargelegt und geordnet. Dazu gestaltet die Lehrperson ein passendes Tafelbild. Die Schülerinnen und Schüler übertragen dieses in ihr Heft oder es wird ihnen in anderer Form (zB Foto – elektronisch oder Ausdruck) zugänglich gemacht.

BS-R9 „Plädoyer für/gegen die Beschreibende Statistik“ (PE)

Aufgabenstellung

Plädoyer für/gegen die Beschreibende Statistik

Stell dir vor, das Bildungsministerium plant, die Beschreibende Statistik aus den Lehrplänen der Mittelschulen und Gymnasien zu streichen.

Schreibe einen Leserbrief für eine Tageszeitung, in dem du deine Meinung zum Vorhaben des Bildungsministeriums darlegst und begründest.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Persönlichkeitsorientierte Reflexion

Die Reflexionsaufgabe zielt auf ein Nachdenken über die Bedeutung und Relevanz der Beschreibenden Statistik für einen selbst, für die schulmathematische Ausbildung wie auch für unsere Gesellschaft im Ganzen ab. Dabei sollten seitens der Schülerinnen und Schülern Pro- wie auch Kontra-Standpunkte zum Vorhaben des Ministeriums zugelassen sein.

Ein wichtiger Teil dieses Reflexionsprozesses sollte aber die Konfrontation und Diskussion der eigenen Meinung und deren Begründung mit den Meinungen und Argumenten der Klassenkolleginnen und Kollegen, eventuell auch jener der Lehrperson, sein.

Position im Unterricht

Die Reflexionsaufgabe sollte erst gegen Ende der Behandlung der Beschreibenden Statistik eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Diskussion im Plenum

Die Leserbriefe werden in Einzelarbeit verfasst und von der Lehrperson abgesammelt und gesichtet. Interessante und jedenfalls auch kontroverse Leserbriefe bzw. Auszüge aus diesen werden von der Lehrperson im Klassenplenum vorgelesen. Für eine Diskussion zu pointierten Formulierungen bzw. zu außergewöhnlichen Positionen sollte ausreichend Zeit sein. Abschließend kann die Lehrperson ihre eigene Position einbringen.