

Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Exponentialfunktionen“

Materialien aus dem Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

EF-R1 „Ausbreitung einer Epidemie“ (MO).....	3
EF-R2 „Passung von Modellen“ (MO)	4
EF-R3 „Exponentielle Wachstumsprozesse“ (MO)	5
EF-R4 „Gemischte Verzinsung“ (MO)	6
EF-R5 „Darstellungen von Exponentialfunktionen“ (MA)	7
EF-R6 „Zinseszins“ (KO)	9

Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind.

Vier Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über mathematische Eigenschaften mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) und über mathematische Zusammenhänge innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen, vor allem aber außermathematischen Situationen.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken darüber, welche Bedeutung (Wichtigkeit, Relevanz) die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat.

EF-R1 „Ausbreitung einer Epidemie“ (MO)

Aufgabenstellung

Ausbreitung einer Epidemie

Im Jahr 2014 brach in Westafrika die sogenannte „Ebolafieber-Epidemie“, eine hochgradig ansteckende Viruserkrankung mit zahlreichen Todesopfern, aus.

In den ersten neun Monaten stieg die Anzahl der Erkrankten immer rascher an, man sprach von einer „exponentiellen Zunahme“.

Wie müsste die Ansteckung vor sich gegangen sein, damit tatsächlich von einer exponentiellen Zunahme der Erkrankten gesprochen werden kann?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler sollten darüber nachdenken, ob ihre Vorstellung von der Verbreitung dieser Epidemie mit ihrer Vorstellung von exponentiellem Wachstum kompatibel ist. Das Konzept der exponentiellen Zunahme würde in diesem Fall ja bedeuten, dass sich die Zahl der Infizierten in gleichen Zeitabschnitten stets um denselben Faktor erhöht (oder umgekehrt: prozentuell gleiche Zuwächse müssen in gleichen Zeitabschnitten erfolgen). Eine meist eher unrealistische Vorstellung.

Dies ändert nichts daran, dass eine exponentielle Modellierung recht gut auf die vorliegenden Infektionsdaten passt, es daher durchaus legitim erscheint, von einer exponentiellen Zunahme zu sprechen.

Die Aufgabe fokussiert auf den Reflexionsprozess, allenfalls wird dadurch auch Grundwissen über exponentielles Wachstum reflektiert und gefestigt.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann eingesetzt werden, sobald den Schülerinnen und Schülern die konstitutive Eigenschaft der Exponentialfunktion $f(x+1) = a \cdot f(x)$ bekannt ist. Erfahrungen im Interpretieren von Exponentialfunktionen können die Bearbeitung der Aufgabe erleichtern.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Schülerinnen und Schüler bearbeiten in Partner(innen)arbeit die Frage und halten ihre Antworten schriftlich fest.

Einige Teams präsentieren im Plenum ihre Überlegungen. Die anderen Schülerinnen und Schüler prüfen diese auf Plausibilität/Richtigkeit, korrigieren und ergänzen diese (unter Kontrolle der Lehrperson).

EF-R2 „Passung von Modellen“ (MO)

Aufgabenstellung

Passung von Modellen

Natürliche Wachstums- oder auch Zerfallsprozesse (zB Verbreitung von Epidemien, Vermehrung von Seerosen oder auch Bakterien bzw. radioaktiver Zerfall, Absterben von Bakterien oder Borkenkäfern etc.) werden oft mittels exponentieller Funktionen modelliert. Diese Modelle beschreiben die jeweiligen Situationen in der Regel nur annähernd, aber für den jeweiligen Verwendungszweck doch hinreichend genau.

Anders ist die Situation zB bei der Modellierung der Kapitalverzinsung mittels Zinseszinsen: Das exponentielle Modell muss hier ganz genau passen, selbst geringe Abweichungen sind hier gar nicht vorstellbar und wären auch inakzeptabel.

- Wie ist dieser Unterschied erklärbar?
- Tritt er nur bei Exponentialfunktionen oder auch bei anderen Funktionstypen auf?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler sollten durch entsprechendes Nachdenken und Diskutieren untereinander den unterschiedlichen Typus der Modelle erkennen. Im ersten Fall geht es um die annähernde Beschreibung eines in unserer Natur/Umwelt beobachtbaren Phänomens (deskriptives Modell), im anderen Fall um eine vom Menschen gemachte, strikt einzuhaltende Vorschrift/Norm (normatives Modell).

Dieser Unterschied ist nicht nur bei exponentiellen Modellen beobachtbar, er ist für die Beurteilung eines Modells in jedem Fall wesentlich. Daher ist hier nicht nur der Reflexionsprozess für sich von Interesse, sondern jedenfalls auch das dabei erzeugte/vertiefte (Reflexions-)Wissen über zwei unterschiedliche Typen von mathematischen Modellen.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte im Rahmen der Behandlung von vielfältigen Anwendungen der Exponentialfunktion eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten in Kleingruppen (drei bis vier Personen), die Aufgabenstellungen und halten ihre Ergebnisse schriftlich fest.

Im Plenum präsentieren einzelne Gruppen ihre Ergebnisse – solange bis alle wesentlichen Aspekte genannt worden sind (nötigenfalls agiert die Lehrperson als letzte Gruppe).

Die Lehrperson sollte schließlich die Begriffe deskriptiv und normativ einführen.

EF-R3 „Exponentielle Wachstumsprozesse“ (MO)

Aufgabenstellung

Exponentielle Wachstumsprozesse

Bei exponentieller Modellierung von Wachstumsprozessen ist oft nur ein „mittlerer Bereich“ von Interesse, das exponentielle Modell interessiert meist weniger für sehr niedrige oder auch für sehr hohe Argumentwerte.

Welche Gründe könnte dies deiner Meinung nach haben?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Im Bereich niedriger Argumentwerte ist der charakteristische Verlauf einer mit $f(x)=c \cdot a^x$ exponentiell modellierten Zunahme noch kaum erkennbar, der Verlauf der Zunahme ließe sich auch durch eine lineare Funktion gut modellieren. Für hohe Argumentwerte übersteigen die Funktionswerte hingegen jeden im Kontext realistischen Wert.

Bei dieser Reflexionsaufgabe steht der Reflexionsprozess deutlich im Vordergrund. Er kann zu einer besseren Vertrautheit mit dem Verlauf von Exponentialfunktionen und vor allem auch zu einem vertieften Verständnis von exponentieller Modellierung beitragen.

Position im Unterricht

Es wäre hilfreich, wenn den Schülerinnen und Schülern grafische Darstellungen von Exponentialfunktionen schon gut vertraut sind.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum (Messebetrieb)

In Gruppen (vier bis fünf Personen) bearbeiten die Schülerinnen und Schüler die Aufgabenstellung und erstellen ein Plakat mit ihren Argumenten.

Im Messebetrieb wird jedes Plakat auf einem Tisch (an der Wand, ...) ausgestellt, ein Gruppenmitglied bleibt als Auskunftsperson beim Plakat. (Die Gruppenmitglieder wechseln sich als Auskunftspersonen ab.) Alle anderen Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrperson besuchen die verschiedenen Tische. Allfällige Kommentare, Zusätze, Korrekturen werden von der jeweiligen Auskunftsperson entgegengenommen. Im Anschluss an den Messebetrieb besprechen die Gruppen die eingegangenen Anmerkungen und finalisieren ihr Gruppenergebnis entsprechend.

EF-R4 „Gemischte Verzinsung“ (MO)

Aufgabenstellung

Gemischte Verzinsung

Bei Sparbüchern werden die Einlagen in der Regel mit „gemischter Verzinsung“ verzinst: Am Ende einer Zinsperiode (meist Ende des Kalenderjahres) werden die in der Zinsperiode angefallenen („einfachen“) Zinsen dem Kapital zugeschlagen und somit in der nächsten Zinsperiode mit verzinst. Das Kapital wächst somit exponentiell – man spricht von Zinseszinsen.

Erfolgen Einlagen im Verlauf einer Zinsperiode, so werden diese allerdings nicht mit Zinseszins, sondern bis zum Ende der Zinsperiode mit einfachem Zins (also linear, nicht exponentiell) verzinst.

Was könnte der Grund sein, warum sich Sparer(innen) und Konsumentenschützer(innen) nicht dagegen verwehren, dass Einzahlungen, die innerhalb einer Zinsperiode getätigt werden, nicht mit Zinseszins sondern nur mit einfachem Zins verzinst werden?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Eine Erklärung findet man recht einfach anhand eines Vergleichs der Graphen/Funktionswerte der linearen Funktion sowie der Exponentialfunktion innerhalb einer Zinsperiode. Die Schülerinnen und Schüler sollten sich nicht mit einer kurzen Antwort begnügen, sondern sich um eine ausführliche und verständliche Erläuterung bemühen.

Im Vordergrund steht hier der (recht einfache) Reflexionsprozess, das Reflexionsergebnis kann man zum Grundwissen über lineare und exponentielle Funktionen rechnen.

Position im Unterricht

Es wäre hilfreich, wenn Schülerinnen und Schüler mit grafischen Darstellungen von linearen Funktionen und Exponentialfunktionen schon gut vertraut sind.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Die Aufgabe wird zu zweit bearbeitet, die entwickelten Erläuterungen werden verschriftlicht. Im Plenum präsentiert und erläutert ein Team seine Antwort. Schülerinnen und Schüler, allenfalls auch die Lehrperson, können nachfragen oder auch kommentieren. Die anderen Teams werden angehalten, bei abweichenden Ideen diese ebenfalls zu präsentieren.

EF-R5 „Darstellungen von Exponentialfunktionen“ (MA)

Aufgabenstellung

Darstellungen von Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen lassen sich durch Funktionsgleichungen folgenden Typs beschreiben:

$$(i) \quad f(x) = c \cdot a^x \quad \text{bzw.} \quad (ii) \quad f(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

- Woran erkennt man in (i) bzw. (ii), ob es sich um eine exponentielle Zunahme oder eine exponentielle Abnahme handelt?
- Wie kann man anhand der Gleichung (i) die Höhe der prozentuellen Zu- oder Abnahme herausfinden? Wie kann man dies anhand der Gleichung (ii) herausfinden?

Hinweise für die Lehrperson

Intention des Reflexionsanlasses

Mathematikorientierte Reflexion

Es ist bei Exponentialfunktionen grundlegend, anhand der Funktionsgleichung zu erkennen/herauszufinden, ob damit eine exponentielle Zunahme oder eine exponentielle Abnahme beschrieben wird, und es ist ebenso grundlegend anhand der Gleichung herauszufinden, wie groß die prozentuelle Zunahme bzw. Abnahme ist.

Wenn die entsprechenden Überlegungen und Zusammenhänge nicht schon im Unterricht vorweg behandelt wurden, können sie von den Schülerinnen und Schülern durch Reflexion(sprozesse) herausgearbeitet werden; das nachhaltig entwickelte Reflexionswissen sollte in etwa folgende Überlegungen beinhalten:

Im Fall der Gleichung (i) ist (für positive c) Ersteres daran erkennbar, ob a größer oder kleiner als 1 ist, Zweiteres daran, wie stark a von 1 (nach oben oder unten) abweicht.

Im Fall der Gleichung (ii) ist (für positive c) Ersteres am Vorzeichen von λ erkennbar (Zunahme für λ positiv, Abnahme für λ negativ), Zweiteres lässt sich nicht direkt aus der gegebenen Gleichung ablesen, vielmehr führt die Gleichung $c \cdot a^x = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$, also $a = e^{\lambda}$, auf das a aus Gleichung (i) und ist entsprechend zu interpretieren.

Die erforderlichen Reflexionsprozesse sind interessant (und für innermathematische Reflexionen durchaus typisch), zentral ist hier aber jedenfalls das oben skizzierte, nachhaltig verfügbare (Reflexions-)Wissen.

Position im Unterricht

Sollten beide Darstellungen im Unterricht parallel eingeführt werden, so eignet sich diese Reflexionsaufgabe in der vorliegenden Form gut zur Bearbeitung im Rahmen dieser Einführung.

In der Regel wird man die beiden Darstellungstypen im Unterricht aber deutlich zeitversetzt behandeln. In diesem Fall wird man die Aufgabe entsprechend in zwei Teile teilen und im zweiten Teil zusätzlich einen Fokus auf eine bewertete Gegenüberstellung der beiden Darstellungstypen legen.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Die Aufgabenstellung wird zu zweit bearbeitet.

Im Plenum präsentiert und erläutert ein Team seine Antwort. Schülerinnen und Schüler, allenfalls auch die Lehrperson, können nachfragen oder auch kommentieren. Die anderen Teams werden angehalten, bei abweichenden Ideen diese ebenfalls zu präsentieren. Abschließend stellen alle Teams sicher, dass sie korrekte Antworten in ihrem Heft notiert haben.

EF-R6 „Zinseszins“ (KO)

Aufgabenstellung

Zinseszins

Die langfristige Verzinsung eines Kapitals erfolgt im Allgemeinen exponentiell („Zinseszinsen“).

Was bewirkt eine derartige Verzinsung, worin besteht ihr Vorteil (für wen?) gegenüber einer linearen Verzinsung („einfacher Zins“)?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Kontextorientierte Reflexion

Schülerinnen und Schüler sollten erkennen und wissen, dass bei der Verzinsung eines Kapitals mit Zinseszins jeweils die in der letzten Zinsperiode angefallenen Zinsen dem Kapital zugeschlagen und in der folgenden Zinsperiode mit verzinst werden. Es sollte ihnen einsichtig sein, dass sich diese Art der Verzinsung dadurch wesentlich vom einfachen Zins unterscheidet, bei dem die Zinsen in jeder Zinsperiode lediglich vom Startkapital berechnet, die Kapitalzuwächse durch zuvor angefallene Zinsen also nicht berücksichtigt werden. Eine Verzinsung mit Zinseszinsen ist somit etwa für jemanden, der Geld verzinst anspart, von Vorteil.

Reflexionsprozess und -wissen sind hier in gleichem Maße bedeutsam.

Position im Unterricht

Beim Einsatz dieser Reflexionsaufgabe sollte den Schülerinnen und Schülern die konstitutive Eigenschaft der Exponentialfunktion schon bekannt sein, die spezielle Interpretation der Exponentialfunktion in der Zinseszinsrechnung jedoch noch nicht.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

In Gruppen (ca. 3 Personen) bearbeiten die Schülerinnen und Schüler die Aufgabenstellung und halten ihre Ergebnisse schriftlich fest. Im Plenum erfolgt ein Austausch der Ergebnisse. Die Lehrperson ergänzt gegebenenfalls. Anschließend wird den Gruppen die Möglichkeit gegeben ihre Ausarbeitungen zu überarbeiten bzw. zu vervollständigen.