

Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Quadratische Funktionen“

Materialien aus dem Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

QF-R1 „Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen“ (MA)	3
QF-R2 „Scheitelpunkt“ (MA)	4
QF-R3 „Koeffizienten quadratischer Funktionen“ (MA)	5
QF-R4 „Senkrechter Wurf nach oben“ (MA, MO).....	6

Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind.

Vier Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über mathematische Eigenschaften mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) und über mathematische Zusammenhänge innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen, vor allem aber außermathematischen Situationen.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken darüber, welche Bedeutung (Wichtigkeit, Relevanz) die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat.

QF-R1 „Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen“ (MA)

Aufgabenstellung

Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen

Wie könnte die grafische Darstellung einer quadratischen Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ im Koordinatensystem aussehen, wenn die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

- zwei
- eine
- keine

Lösung(en) hat? Begründe dies.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Es handelt sich nur dann um eine Reflexionsaufgabe, wenn der gefragte Zusammenhang zwischen quadratischer Gleichung und grafischer Darstellung der zugehörigen quadratischen Funktion nicht schon zuvor im Unterricht nachhaltig behandelt wurde. (Andernfalls wird lediglich die Reproduktion von (Reflexions-)Wissen gefordert.)

Das Hauptinteresse gilt bei dieser Aufgabe dem Reflexionswissen.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte im Rahmen der Einführung quadratischer Funktionen behandelt werden. Die Lösungsfälle quadratischer Gleichungen sollten auf algebraischer Ebene vorweg bekannt sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum (Messebetrieb)

Die Schülerinnen und Schüler machen sich in Dreiergruppen Gedanken zu dieser Fragestellung. Sie skizzieren auf einem Plakat zu allen drei Fällen mögliche Funktionsgraphen und notieren ihre Überlegungen dazu. Die Plakate werden in der Klasse aufgehängt, ein Gruppenmitglied (abwechselnd) bleibt als „Auskunftsperson“ beim eigenen Plakat. Die übrigen Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrperson besuchen die anderen Plakate, kommentieren und machen Vorschläge für Ergänzungen bzw. Korrekturen. Nach dem „Rundgang“ korrigieren, ergänzen und finalisieren alle Gruppen ihre Plakate, die Gruppenmitglieder übertragen ihr Gruppenergebnis in ihre Hefte.

QF-R2 „Scheitelpunkt“ (MA)

Aufgabenstellung

Scheitelpunkt

Wie kann man die Koordinaten des Scheitelpunkts jeder beliebigen quadratischen Funktion bestimmen, wenn man nur die Funktionsgleichung kennt?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Es handelt sich nur dann um eine Reflexionsaufgabe, wenn die erforderliche Vorgehensweise im Unterricht noch nicht nachhaltig für zwei, eine bzw. keine Nullstelle behandelt wurde.

Der Fokus liegt hier auf dem Reflexionsergebnis (Reflexionswissen), wobei unterschiedliche Strategien möglich sind.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann eingesetzt werden, wenn die Schülerinnen und Schüler den Begriff „Scheitelpunkt“ kennen, über mögliche Lagen der grafischen Darstellung im Koordinatensystem Bescheid wissen und Punkte der grafischen Darstellung einer quadratischen Funktion aus ihrer symbolischen Darstellung ermitteln können.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler machen sich zuerst zu zweit Gedanken zu dieser Fragestellung. Im Anschluss daran bilden je zwei Teams eine Vierergruppe, vergleichen ihre Ergebnisse und halten ihre gefundene(n) Strategie(n) schriftlich fest.

Zum Schluss erfolgt eine Besprechung der Ergebnisse im Plenum: Die Gruppen berichten kurz über die von ihnen gefundenen Ergebnisse/Strategien. Die Lehrperson hält unterschiedliche Strategien in geeigneter Form an der Tafel fest und zeigt Gemeinsamkeiten, Unterschiede und Beziehungen zwischen den verschiedenen Strategien auf. Die Schülerinnen und Schüler notieren im Heft die wesentlichsten Aspekte.

QF-R3 „Koeffizienten quadratischer Funktionen“ (MA)

Aufgabenstellung

Koeffizienten quadratischer Funktionen

Wie wirkt es sich auf die Nullstellen aus, wenn man alle Koeffizienten einer quadratischen Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit der gleichen Zahl (ungleich Null) multipliziert oder durch die gleiche Zahl (ungleich Null) dividiert? Warum?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die „Lösung“ (und deren Begründung) ist ebenso einfach wie im ersten Moment vielleicht auch verblüffend.

Eventuell erkennen Schülerinnen und Schüler darüber hinaus sogar, dass es unendlich viele quadratische Funktionen mit denselben Nullstellen gibt oder auch, dass die hier gestellte Frage für beliebige Funktionen in gleicher Weise gestellt und beantwortet werden könnte.

Ein zielführender Reflexionsprozess erfordert eine geeignete Idee, das Reflexionswissen kann gelegentlich hilfreich/erforderlich sein.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann eingesetzt werden, wenn die Schülerinnen und Schüler die Definition von Nullstellen von (quadratischen) Funktionen kennen.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler setzen sich in Kleingruppen (drei bis vier Schülerinnen bzw. Schüler) zusammen, besprechen gemeinsam die Fragestellungen und halten das Ergebnis und die Argumente schriftlich fest.

Im Anschluss daran findet eine Besprechung der Ergebnisse/Argumente im Plenum statt.

QF-R4 „Senkrechter Wurf nach oben“ (MA, MO)

Aufgabenstellung

Senkrechter Wurf nach oben

Ein senkrechter Wurf nach oben wird meist durch eine Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

t – Zeit (s); $h(t)$ – Höhe zum Zeitpunkt t (m)

v_0 – Anfangsgeschwindigkeit ($\frac{m}{s}$); $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ – Erdbeschleunigung

modellhaft beschrieben.

Dieser Modellierung liegt die Annahme zugrunde, dass die Steigzeit ebenso groß wie die Fallzeit ist. Erkläre, woran man dies erkennen kann.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst erkennen, dass es sich bei der Funktionsgleichung um eine quadratische Gleichung handelt. Nachdenken über Eigenschaften der gegebenen quadratischen Funktion, die für die angeführte Fragestellung relevant sind (Symmetrie, d. h., Scheitel liegt in der Mitte der Nullstellen; ein Nullpunkt liegt im Koordinatenursprung; Extremstelle ist ein Maximum), führt zu einer passenden Erklärung.

Von Interesse ist hier allein der Reflexionsprozess.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann behandelt werden, sobald den Schülerinnen und Schülern quadratische Funktionen und die Symmetrie (d. h., Scheitel liegt in der Mitte der Nullstellen) als deren charakteristische Eigenschaft bekannt sind.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zu zweit die Aufgabenstellung und verschriftlichen ihre Erklärung.

Im Anschluss werden einige, möglichst unterschiedliche, Erklärungen im Plenum besprochen.