

# **Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Lineare Funktionen“**

## **Materialien aus dem Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“**

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)  
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,  
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien  
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik  
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

## Inhalt

LF-R1 „Darstellungsformen linearer Funktionen“ (MA) .....	3
LF-R2 „Grafische Darstellung linearer Funktionen im Koordinatensystem“ (MA) .....	4
LF-R3 „Warum nicht linear?“ (MO) .....	6
LF-R4 „Entwicklung einer Bevölkerungszahl“ (MO) .....	7
LF-R5 „Lineare Funktionen – wozu?“ (KO) .....	8
LF-R6 „Bedeutung linearer Funktionen“ (PE) .....	9

**Reflexion** meint das ...

... Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind.

### **Vier Arten mathematischer Reflexion:**

**MA - Mathematikorientierte Reflexion** meint das ...

... Nachdenken über mathematische Eigenschaften mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) und über mathematische Zusammenhänge innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

**MO - Modellorientierte Reflexion** meint das ...

... Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen, vor allem aber außermathematischen Situationen.

**KO - Kontextorientierte Reflexion** meint das ...

... Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt.

**PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion** meint das ...

... Nachdenken darüber, welche Bedeutung (Wichtigkeit, Relevanz) die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat.

## LF-R1 „Darstellungsformen linearer Funktionen“ (MA)

### Aufgabenstellung

#### Darstellungsformen linearer Funktionen

Lineare Funktionen kann man grafisch (im kartesischen Koordinatensystem), symbolisch (mittels Funktionsgleichung) oder auch tabellarisch darstellen.

Wofür eignet sich jede dieser drei Darstellungsformen linearer Funktionen besonders gut?

### Hinweise für die Lehrperson

#### Intention der Reflexionsaufgabe

##### *Mathematikorientierte Reflexion*

Falls nicht schon bei der unterrichtlichen Behandlung der linearen Funktion ausführlich über die Stärken (und Schwächen) dieser drei Darstellungsformen gesprochen wurde (in diesem Fall würde die Aufgabenstellung weniger Reflexion als Reproduktion von Wissen erfordern), lohnt ein genaueres Nachdenken über Darstellungen linearer Funktionen allgemein auch als paradigmatisches Beispiel eines nützlichen Reflexionsprozesses über Stärken und Schwächen von Darstellungsformen in der Mathematik generell.

Darüber hinaus ist hier zweifellos auch das Ergebnis des Nachdenkprozesses (Reflexionswissen) bedeutsam: Welche Darstellungsformen linearer Funktionen erscheinen für welche Fragestellungen besonders geeignet, für welche Darstellungsform sollte man sich in einer bestimmten Problemsituation entscheiden?

#### Position im Unterricht

Für die Bearbeitung der Reflexionsaufgabe genügt es, wenn den Schülerinnen und Schülern grafische, symbolische und tabellarische Darstellungsformen linearer Funktionen bekannt sind.

#### Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

##### *Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum*

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten in Kleingruppen (drei bis vier Personen) die Fragestellung und einigen sich auf gemeinsame Antworten, die sie geordnet nach Darstellungsform schriftlich festhalten.

Die Gruppen nennen im Plenum (zB reihum) zunächst für die erste Darstellungsform gefundene Aspekte. Die Lehrperson fragt allenfalls nach, notiert die (zutreffenden) Antworten in geeigneter Formulierung an der Tafel (oder Pinwand, PowerPoint, ...) bzw. macht Mehrfachnennungen sichtbar. Falls wichtige Aspekte fehlen, kann die Lehrperson ergänzen. Das so entstehende Tafelbild halten die Schülerinnen und Schüler im Heft fest.

Analog für die beiden anderen Darstellungsformen.

## LF-R2 „Grafische Darstellung linearer Funktionen im Koordinatensystem“ (MA)

### Aufgabenstellung

#### Grafische Darstellung linearer Funktionen im Koordinatensystem

Welche Bedingungen müssen für  $k$  und  $d$  erfüllt sein, damit die grafische Darstellung einer linearen Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung  $f(x) = k \cdot x + d, x \in \mathbb{R}$  nur im

- a) 1., 2. und 3.
- b) 1. und 3.
- c) 2., 3. und 4.
- d) 1. und 2.
- e) 1. und 4.
- f) 3.

Quadranten des kartesischen Koordinatensystems liegt? Begründe.

### Hinweise für die Lehrperson

#### Intention der Reflexionsaufgabe

##### *Mathematikorientierte Reflexion*

Über mögliche Werte der Parameter einer Geradengleichung nachzudenken, wenn die Lage der Geraden nur recht allgemein durch die passierten Quadranten beschrieben ist, stellt eine eher ungewohnte Umkehrung der üblichen Fragestellung ( $k$  und  $d$  gegeben, was kann man über die Lage der Geraden sagen?) dar und erfordert entsprechende Reflexion über die Situation und die Beziehung zwischen grafischer und symbolischer Darstellung. Dabei sollte keinesfalls auf die geforderte Begründung verzichtet werden.

e) und f) gehen insofern noch ein deutliches Stück weiter, als in e) gar keine Funktion und somit auch keine Funktionsgleichung vorliegt (die Angabe/Fragestellung somit streng genommen gar nicht korrekt ist), in f) die Definitionsmenge der Funktion eine andere sein muss, als in der Aufgabenstellung angegeben. In beiden Fällen sind einzelne Teile der Angaben inkompatibel – was durch Reflexion erkannt und entsprechend begründet werden sollte (falls man auf e) und f) nicht überhaupt verzichten möchte).

Wenn man bei diesen Reflexionen sicher auch einiges über (lineare) Funktionen lernen bzw. sich wieder ins Gedächtnis rufen kann, steht hier aber doch deutlich der Prozess des Reflektierens im Vordergrund.

#### Position im Unterricht

Für die Bearbeitung dieser Reflexionsaufgabe sollten die Schülerinnen und Schüler über die Wirkung der Parameter der Funktionsgleichung für die grafische Darstellung linearer Funktionen bereits Bescheid wissen.

#### Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

##### *Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum, Einzelarbeit (Nachbetrachtung)*

Es werden sechs Gruppen gebildet, in denen alle sechs Aufgaben bearbeitet werden.

Im Plenum präsentiert jede Gruppe ihr Ergebnis für einen Unterpunkt, die anderen Gruppen (gegebenenfalls auch die Lehrperson) können kommentieren und nachfragen. Korrekte Antworten werden von allen Schülerinnen und Schülern schriftlich festgehalten.

Es kann lohnend sein, in einer abschließenden persönlichen Nachbetrachtung (schriftlich, Einzelarbeit, eventuell als Hausübung) den eigenen Reflexionsprozess in den Blick zu nehmen:

„Welche Unterpunkte

- hätte ich selbst richtig beantwortet,
- sind mir erst in der Gruppenarbeit klar geworden,
- habe ich erst im Plenum richtig verstanden?

Woran habe ich selbst gar nicht gedacht? Woran ist das – glaube ich – gelegen?

Was könnte ich beim nächsten Mal anders machen?“

## LF-R3 „Warum nicht linear?“ (MO)

### Aufgabenstellung

#### Warum nicht linear?

Lineare Modelle eignen sich meist nicht gut zur Beschreibung der ungehemmten Ausbreitung einer Epidemie. Nenne Gründe dafür.

### Hinweise für die Lehrperson

#### Intention der Reflexionsaufgabe

##### *Modellorientierte Reflexion*

Nachdenken über den „Mechanismus“ der ungebremsten Ausbreitung einer Epidemie und dessen Gegenüberstellung zu den definitorischen Eigenschaften der linearen Funktion sollten den Schülerinnen und Schülern angemessene Antworten und Begründungen ermöglichen. Im Vordergrund steht der (hier eher einfache) Reflexionsprozess, es kann aber durchaus nützlich sein, dessen Ergebnis als paradigmatisches Beispiel nachhaltig verfügbar zu haben.

#### Position im Unterricht

Voraussetzung für eine produktive Bearbeitung dieser Reflexionsaufgabe ist, dass Schülerinnen und Schüler die definitorischen Eigenschaften linearer Funktionen kennen. Erfahrungen im Interpretieren linearer Funktionen in unterschiedlichen Kontexten werden hilfreich sein.

#### Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

##### *Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum*

Die Schülerinnen und Schüler machen sich zunächst alleine Gedanken zu der Fragestellung. Anschließend setzen sie sich in Kleingruppen (drei bis vier Personen) zusammen, diskutieren weiter über die Fragestellung und halten ihre Gruppenergebnisse schriftlich fest. Die Gruppenergebnisse werden im Plenum präsentiert und (unter Beteiligung der Lehrperson) diskutiert.

## LF-R4 „Entwicklung einer Bevölkerungszahl“ (MO)

### Aufgabenstellung

#### Entwicklung einer Bevölkerungszahl

Unter welcher Annahme könnte die Entwicklung einer Bevölkerungszahl sinnvoll linear beschrieben werden? Warum erscheint eine solche Annahme meist (nicht) realistisch?

### Hinweise für die Lehrperson

#### Intention der Reflexionsaufgabe

##### *Modellorientierte Reflexion*

Über die definitorischen Eigenschaften der linearen Funktion wie auch über verschiedene Einflussgrößen (und ihr in der Regel sehr komplexes Zusammenspiel) bei der Entwicklung der Bevölkerungszahl sollte von den Schülerinnen und Schülern nachgedacht werden. Daraus sind Antworten auf die gestellten Fragen unmittelbar ableitbar.

Der Reflexionsprozess kann paradigmatisch für Passungsüberlegungen von mathematischen Modellen gesehen werden – was bedeutsamer erscheint als das (hypothetische) Reflexionsergebnis.

#### Position im Unterricht

Voraussetzung ist, dass Schülerinnen und Schüler die definitorischen Eigenschaften linearer Funktionen kennen. Erfahrungen im Interpretieren linearer Funktionen in unterschiedlichen Kontexten können hilfreich sein.

#### Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

##### *Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum*

Schülerinnen und Schüler bearbeiten in Partner(innen)arbeit die Fragen und notieren ihre Antworten im Heft.

Im Plenum sammelt die Lehrperson einzelne Antworten und hält sie an der Tafel fest.

Hinsichtlich der zweiten Frage wird unterschieden, ob sich die Antwort eher für oder eher gegen eine lineare Beschreibung ausspricht. Die Schülerinnen und Schüler sehen, welche Antworten sie selbst nicht gefunden haben und notieren diese.

## LF-R5 „Lineare Funktionen – wozu?“ (KO)

### Aufgabenstellung

#### Lineare Funktionen – wozu?

Wozu werden Lineare Funktionen verwendet?

Welche Vorteile hat eine Modellierung mit einer Linearen Funktion, welche Nachteile kann sie haben? (Erläutere dies auch anhand von Beispielen.)

### Hinweise für die Lehrperson

#### Intention der Reflexionsaufgabe

##### *Kontextorientierte Reflexion*

Schülerinnen und Schüler sollten erkennen (Reflexionsprozess) und wissen (Reflexionswissen), dass lineare Funktionen verwendet werden, wenn eine Veränderung modelliert wird, deren Entwicklung bezüglich absoluter Beträge (annähernd) gleichmäßig verläuft. Sie sollten weiters erkennen und wissen, dass der Vorteil linearer Modellierung vor allem in der Einfachheit (auch hinsichtlich der Interpretation) liegt, ihr Nachteil, dass sich lineare Funktionen nicht für die Modellierung von Entwicklungen eignen, die in sachrelevantem Maße von der Linearität abweichen.

Reflexionsprozess und Reflexionswissen sind hier in gleichem Maße relevant.

#### Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann eingesetzt werden, wenn den Schülerinnen und Schülern die definitorischen Eigenschaften linearer Funktion bekannt sind und sie schon Erfahrungen mit Anwendungen linearer Funktionen gesammelt haben.

#### Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

##### *Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum*

Zu Beginn setzen sich die Schülerinnen und Schüler in Einzelarbeit mit der Aufgabenstellung auseinander und notieren ihre Gedanken stichpunktartig.

Anschließend tauschen sie sich in Gruppen (ca. vier Personen) aus und halten das Ergebnis schriftlich fest.

Im Plenum stellt eine Gruppe ihr Ergebnis vor und geht auf etwaige Fragen oder Bemerkungen dazu ein. Die anderen Gruppen stellen ergänzende Aspekte aus den eigenen Ergebnissen ebenfalls vor. Zur Unterstützung des Austausches können die genannten Aspekte an der Tafel gegliedert nach „Wozu?“, „Vorteile“ und „Nachteile“ stichwortartig festgehalten werden. Letzteres könnte eine Schülerin bzw. ein Schüler übernehmen, die Lehrperson unterstützt gegebenenfalls bei der Ordnung und Formulierung. Wenn nötig fügt die Lehrperson nach dem Austausch zwischen den Schülerinnen und Schülern weitere relevante Aspekte hinzu.



## LF-R6 „Bedeutung linearer Funktionen“ (PE)

### Aufgabenstellung

#### Bedeutung linearer Funktionen

- Hältst du es für dich persönlich für wichtig, über „Lineare Funktionen“ gut Bescheid zu wissen? Warum (nicht)?
- Sollten alle Schülerinnen und Schüler deiner Schule lineare Funktionen lernen? Begründe deine Antwort.

### Hinweise für die Lehrperson

#### Intention der Reflexionsaufgabe

##### *Persönlichkeitsorientierte Reflexion*

Es kann für die Schülerinnen und Schüler interessant und sinnstiftend sein, darüber nachzudenken, welche Bedeutung dieser Inhalt für einen persönlich hat, für wie nützlich oder auch verzichtbar man ihn für sich selbst erachtet – und diese eigene Einschätzung mit anderen zu teilen, andere Einschätzungen (und deren Begründung) dazu zu hören.

Aus der Wichtigkeit oder auch geringen Bedeutung für einen selbst folgt nicht notwendigerweise, dass man dies auch für alle anderen Schülerinnen und Schüler so einschätzt. Diese hier intendierte Unterscheidung zwischen eigener Person und Kollektiv kann über die Thematik der linearen Funktion hinausgehend bedeutsam sein. Wie auch, dass es auf beiden Ebenen keine richtigen oder falschen Einschätzungen und Meinungen gibt, nur verschiedene und unterschiedlich gut begründete.

Im Vordergrund stehen ganz die Reflexionsprozesse. Aber auch die Begründungen anderer Schülerinnen und Schüler, deren Einschätzungen von der eigenen abweichen, sind relevant (und Anlass für weiteres Nachdenken und Bewerten).

#### Position im Unterricht

Beim Einsatz dieser Reflexionsaufgabe sollten die Schülerinnen und Schüler bereits über ein breites Wissen über lineare Funktionen und deren Anwendungen verfügen.

#### Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

##### *Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Einzelarbeit (Nachbetrachtung)*

Beide Fragestellungen werden in Einzelarbeit im Rahmen einer Hausübung ausführlich behandelt. Die eigenen, begründeten Positionierungen werden in Form eines „Eintrages in ein Tagebuch“ schriftlich festgehalten.

In der nächsten Unterrichtsstunde werden in größeren Gruppen (mindestens fünf Schülerinnen bzw. Schüler) die individuellen Positionierungen ausgetauscht, Wichtiges wird individuell schriftlich festgehalten.

Abschließend sollte der zuvor erstellte „Tagebucheintrag“ in Einzelarbeit um Antworten zu folgenden Fragen ergänzt werden:

„Welche Pro- und Kontra-Argumente der Mitschüler(innen) zu beiden Fragestellungen haben mich besonders beeindruckt?

Bleibe ich bei meinen ursprünglichen Positionen?

Hätte ich nun neue Argumente?“