

Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Reelle Zahlen“

Materialien aus dem Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

RZ-R1 „Irrationale Zahl“ (MA)	3
RZ-R2 „Zahldarstellungen“ (MA).....	4
RZ-R3 „Wozu unterschiedliche Zahlenmengen?“ (KO).....	5

Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind.

Vier Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über mathematische Eigenschaften mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) und über mathematische Zusammenhänge innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen, vor allem aber außermathematischen Situationen.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken darüber, welche Bedeutung (Wichtigkeit, Relevanz) die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat.

RZ-R1 „Irrationale Zahl“ (MA)

Aufgabenstellung

Irrationale Zahl

Zwei Schülerinnen bzw. Schüler (S1 und S2) unterhalten sich:

S1: Das ist wirklich seltsam!

S2: Was denn?

S1: Schau her, hier steht:

„ π ist eine irrationale Zahl.“

S2: Genau. Und was ist da jetzt seltsam?

S1: Warum schreibt man da ein Symbol hin? Zahlen bestehen doch immer aus Ziffern, oder?

Führe den Dialog von S1 und S2 fort.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die Erklärung wäre relativ kurz: Weil es sich um eine neue Zahlenart handelt, nämlich unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen. Dafür musste man eine angemessene Darstellung finden, die möglichst kurz und von unendlichen periodischen Dezimalzahlen (für deren Darstellung übrigens auch ein Symbol verwendet wird) sowie den Darstellungen aller anderen Zahlenarten (wo übrigens bei Bruchdarstellung und Darstellung von negativen Zahlen ebenfalls Symbole verwendet werden) unterscheidbar ist.

(*Hinweis:* In der Aufgabe kann die Zahl π eventuell auch durch $\sqrt{2}$ (o. Ä.) ersetzt werden.)

Man kann nicht erwarten, dass (allen) Schülerinnen und Schülern dieser Sachverhalt in der Form vertraut ist. Wesentlich erscheint, dass sich die Schülerinnen und Schüler anhand dieser Reflexionsaufgabe die Besonderheit irrationaler Zahlen, die eben auch in der Zahlendarstellung ihren Niederschlag findet, nochmals bewusst machen. Dabei sind Reflexionsprozess und Reflexionswissen in gleichem Maße relevant.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte im Rahmen der Behandlung irrationaler Zahlen eingesetzt werden. Es genügt, wenn die Schülerinnen und Schüler bereits wissen, was irrationale Zahlen sind und die zwei Darstellungsmöglichkeiten kennen.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, ev. Besprechung im Plenum

Vor Beginn der Arbeitsphase können von der Lehrperson Vorgaben zur gewünschten Länge des Dialogs gemacht werden.

Diese Reflexionsaufgabe wird in Einzelarbeit in schriftlicher Form entweder als Hausübung oder als Schreibauftrag in der Schulstunde von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet. Hierzu muss ihnen ausreichend Zeit zur Verfügung gestellt werden. Die verschriftlichten Ergebnisse werden der Lehrperson abgegeben. Eventuell können einige Dialoge (freiwillige Zumeldung) im Plenum vorgetragen und besprochen werden.

RZ-R2 „Zahldarstellungen“ (MA)

Aufgabenstellung

Zahldarstellungen

- Rationale Zahlen lassen sich als Brüche oder als (endliche bzw. unendlich periodische) Dezimalzahlen darstellen.
Nenne Vorteile und Nachteile der Dezimaldarstellung (gegenüber der Bruchdarstellung).
- Welche der gefundenen Vorteile und Nachteile gelten auch für die Dezimaldarstellung irrationaler Zahlen (gegenüber einer reinen Symboldarstellung)?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler könnten/sollten durch Reflexion Vorteile/Nachteile der verschiedenen Darstellungen (zB beim Größenvergleich, beim Operieren oder beim Kommunizieren (Kürze der Darstellung)) erkennen.

Es können aber auch subjektive Argumente (zB „ich mag Brüche nicht“; „ich tue mir mit Brüchen schwerer“) angeführt werden. Das ist zu akzeptieren, man sollte aber (spätestens in einer abschließenden Besprechung) diese beiden Bewertungszugänge auseinanderhalten.

Insgesamt sind jedenfalls qualitativ ansprechende Reflexionsprozesse und entsprechende Argumentationen bedeutsamer als nachhaltiges Reflexionswissen.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann nach Einführung der irrationalen Zahlen eingesetzt werden. Wenn die irrationalen Zahlen im Unterricht noch nicht thematisiert wurden, wird man die Aufgabenstellung auf den ersten Punkt beschränken.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum (Messebetrieb)

Zu zweit erstellen die Schülerinnen und Schüler zur ersten Aufgabenstellung eine übersichtliche Auflistung von Vor- und Nachteilen.

Je zwei Paare bilden eine Gruppe. Die Blätter aus den Partner(innen)arbeiten werden gesichtet und diskutiert; ein Gruppenergebnis wird gemeinsam erarbeitet schriftlich festgehalten.

Nun wird die zweite Aufgabenstellung diskutiert. Vor- und Nachteile, die auch für irrationale Zahlen gelten, werden markiert.

Im Messebetrieb wird jedes Gruppenergebnis auf einem Tisch ausgestellt, ein Gruppenmitglied bleibt als Auskunftsperson am Tisch. (Die Gruppenmitglieder wechseln sich als Auskunftspersonen ab.) Alle anderen Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrperson besuchen die verschiedenen Tische. Allfällige Kommentare, Zusätze, Korrekturen werden von der jeweiligen Auskunftsperson entgegengenommen. Im Anschluss an den Messebetrieb besprechen die Gruppen die eingegangenen Anmerkungen und finalisieren ihr Gruppenergebnis entsprechend.

RZ-R3 „Wozu unterschiedliche Zahlenmengen?“ (KO)

Aufgabenstellung

Wozu unterschiedliche Zahlenmengen?

- A) Wozu braucht man natürliche Zahlen?
- B) Wozu braucht man negative Zahlen?
- C) Wozu braucht man Bruchzahlen?
- D) Wozu braucht man irrationale Zahlen?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Kontextorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler sollen über Funktion bzw. Zweck der angegebenen Zahlenmengen nachdenken. Diese Reflexionen können und werden sich bei A) – C) wohl vorwiegend in Richtung (praktischer) Anwendungen bewegen, bei D) sind weniger konkrete Antworten zu erwarten. (Es ist sicher interessant zu erfahren, ob π oder $\sqrt{\quad}$ von Schülerinnen und Schülern praktischen Anwendungen zugeordnet oder doch eher als theoretisches Konstrukt/Fiktion gesehen wird.)

Eventuell könnten von Schülerinnen und Schülern auch Überlegungen zur Durchführbarkeit von Rechenoperationen und zum Lösen von Gleichungen vorgebracht werden.

Neben den Reflexionsprozessen erscheint auch eine Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse (als Reflexionswissen) durchaus sinnvoll (sinnstiftend!).

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann (in ihrer Gesamtheit) erst nach Einführung der irrationalen Zahlen eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum (Vernissage)

Es werden Gruppen gebildet mit mindestens so vielen Schülerinnen und Schülern wie Zahlenmengen bearbeitet werden (wenn A bis D, dann also Vierergruppen und gegebenenfalls einzelne Fünfergruppen).

Gruppenarbeit - Phase 1: Schüler(in) A notiert (in Einzelarbeit) Antworten zur Frage A, Schüler(in) B notiert Antworten zur Frage B auf je einem eigenen Blatt Papier, usw. (Wenn zwei Schülerinnen oder Schüler dieselbe Frage beantworten, sollte das Frage C sein und sie notieren (in Partner(innen)arbeit) ihre Antworten auf einem Blatt Papier. Innerhalb einer Gruppe sollten alle Schülerinnen und Schüler in unterschiedlichen Farben schreiben, um später leichter nachvollziehen zu können, wer welchen Text geschrieben hat.

Gruppenarbeit - Phasen 2 bis 4: Die Blätter werden in der Gruppe reihum (um jeweils einen Platz) weitergegeben. Die Antworten, die schon auf dem Blatt notiert sind, werden (in Einzelarbeit) abgehakt oder gestrichen, allenfalls wird um weitere Antworten ergänzt.

Gruppenarbeit - Phase 5: Die Antwortblätter zu den bearbeiteten Zahlenmengen werden der Reihe nach gesichtet und diskutiert; die Gruppe einigt sich auf ein Gruppenergebnis und hält dieses auf einem Blatt Papier fest.

Die Lehrperson sammelt die Gruppenergebnisse ab, sichtet diese und erstellt für jede behandelte Zahlenmenge ein Plakat mit einer Zusammenstellung passender Antworten von Schülerinnen und Schülern, allenfalls ergänzt durch weitere von der Lehrperson eingebrachte Aspekte. Die Plakate werden (für mindestens zwei Wochen) im Klassenzimmer ausgestellt. Die Schülerinnen und Schüler können ihre eigenen Aufzeichnungen entsprechend ergänzen.