

Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Elementare Algebra“

Materialien aus dem Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

EA-R1 „Unterschiedliche Darstellungsformen“ (MA)	3
EA-R2 „Variable sind keine Erfindung der Mathematik“ (MA)	4
EA-R3 „Inhaltliches Beschreiben vs. Umformen von Formeln“ (MA)	5
EA-R4 „Rechnen mit algebraischen Zeichen“ (MA)	7
EA-R5 „Formeln – wozu?“ (KO)	8
EA-R6 „Elementare Algebra – Ist das wichtig?“ (PE)	9

Reflexion meint das ...

... Nachdenken über **Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen**, die anhand des Vorliegenden **nicht direkt ablesbar** oder **unmittelbar einsichtig** sind.

Vier Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über **mathematische Eigenschaften** mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) **und über mathematische Zusammenhänge** innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über **Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen**, vor allem aber **außermathematischen Situationen**.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über **Wirkungen** mathematischer Konzepte **in unserer Welt**.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken darüber, **welche Bedeutung** (Wichtigkeit, Relevanz) **die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat**.

EA-R1 „Unterschiedliche Darstellungsformen“ (MA)

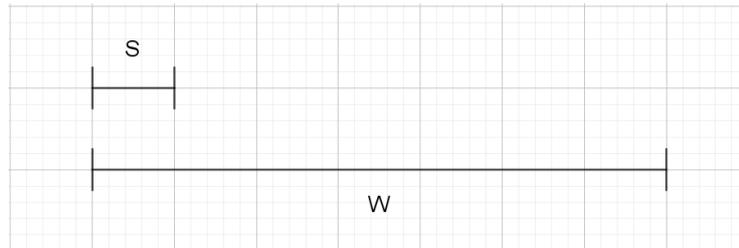
Aufgabenstellung

Unterschiedliche Darstellungsformen

verbal:

In einem verdünnten Himbeersaft ist siebenmal so viel Wasser wie Sirup.

grafisch:



symbolisch:

$$S \cdot 7 = W$$

Welche Darstellungsform hat welche Stärke(n)?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Neben dem Prozess des Nachdenkens über Stärken der angeführten Darstellungsformen, geht es bei diesem Reflexionsanlass auch wesentlich um die Ergebnisse: Die wichtigsten Stärken jeder Darstellungsform sollten den Schülerinnen und Schülern als (Reflexions-)Wissen vertraut sein – und sie sollten diese Stärken später in entsprechenden Situationen nutzen.

Position im Unterricht

Die Aufgabe eignet sich als Reflexionsaufgabe, wenn im Unterricht die verschiedenen Darstellungsformen zwar verwendet, deren jeweiligen Vor- und Nachteile aber noch nicht besprochen wurden. (Andernfalls ist eher eine Reproduktion von Wissen intendiert.)

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler beschäftigen sich zu zweit mit der Fragestellung der Reflexionsaufgabe.

Die Teams nennen im Plenum (zB reihum) zunächst für die erste Darstellungsform gefundene Stärken, die Lehrperson notiert die (zutreffenden) Antworten auf der Tafel und clustert sie gleichzeitig (fragt gegebenenfalls auch nach und benennt die Cluster). Falls wichtige Gesichtspunkte fehlen, kann die Lehrperson ergänzen. Das so entstehende Tafelbild halten die Schülerinnen und Schüler im Heft fest.

Analog für die beiden anderen Darstellungsformen.

EA-R2 „Variable gibt es nicht nur in der Mathematik“ (MA)

Aufgabenstellung

Variable gibt es nicht nur in der Mathematik

Variablen kommen nicht nur in der Mathematik vor. In unserer Alltagssprache verwenden wir zB „jemand“, oder „ein“ stellvertretend für konkrete Personen, Objekte etc. In dem Satz „Jemand kommt zur Tür herein“ kann „jemand“ stellvertretend für beliebige Personen stehen, „ein Auto“ meint kein bestimmtes Auto, sondern ein beliebiges ...

Die in der Mathematik verwendeten Variablen sind recht ähnlich jenen Variablen, die wir in unserer Alltagssprache verwenden. Sie haben aber besondere Eigenschaften.

Was haben mathematische Variablen mit Variablen in unserer Alltagssprache gemeinsam?
Was unterscheidet sie voneinander?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Bei der Reflexion des Konzeptes mathematischer Variablen sollten die Schülerinnen und Schüler darüber nachdenken, wofür Variablen in der Mathematik stehen und verwendet werden. Sie sollten erkennen, dass Variablen in der Mathematik immer mathematische Objekte repräsentieren; in der Elementaren Algebra sind diese Objekte in der Regel Zahlen (mit denen dann nach bestimmten Regeln, losgelöst vom Kontext, operiert werden kann). Variablen im alltäglichen Sprachgebrauch hingegen können – wie oben exemplarisch angeführt – darüber hinaus auch Repräsentanten für andere Sachverhalte, Dinge, Personen etc. sein. Die mathematische Variable ist also gewissermaßen ein Spezialfall des weiter gefassten, allgemeinen Variablenbegriffs.

Diese spezifische Eigenschaft mathematischer Variablen sollte Schülerinnen und Schülern bei der Beschäftigung mit Mathematik, insbesondere auch beim Darstellen und Interpretieren in der Elementaren Algebra, bewusst und vertraut sein.

Der hier erforderliche Reflexionsprozess ist bedeutsam, aber auch komplex, vielfältig, herausfordernd und jedenfalls von der Intensität und Reflektiertheit der Verwendung des Variablenbegriffs im Mathematikunterricht beeinflusst. Entsprechend sollten nicht nur die jeweils individuellen Reflexionsergebnisse das bedeutsame Reflexionswissen determinieren, sondern alle stimmigen, im Klassenverband besprochenen Überlegungen.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte erst eingesetzt werden, wenn die Schülerinnen und Schüler schon recht gut vertraut im Umgang mit Variablen in der Mathematik sind.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zu zweit die Reflexionsaufgabe. Ihre Ergebnisse halten sie auf Kärtchen fest. Die Kärtchen werden von ihnen im Plenum vorgestellt und an einer Pinnwand geclustert aufgehängt. Die Lehrperson kann beim Clustern helfend eingreifen, auf wichtige Aspekte besonders hinweisen und gegebenenfalls Ergänzungen vornehmen.

EA-R3 „Inhaltliches Beschreiben vs. Umformen von Formeln“ (MA)

Aufgabenstellung

Inhaltliches Beschreiben vs. Umformen von Formeln

Es sind der Oberflächeninhalt O eines Quaders und die Kantenlängen a , b der Grundfläche gegeben. Gib an, wie man die Höhe h des Quaders ermitteln kann.

Die Zwillinge Max und Moritz bearbeiten beide diese Aufgabe korrekt, aber auf sehr unterschiedliche Art und Weise:

Max:

Man denkt sich die Oberfläche des Quaders ausgebreitet als Netz. Dann nimmt man die Grund- sowie die Deckfläche weg und erhält so den Mantel, also ein großes Rechteck. Eine Seite des Rechtecks entspricht der Höhe des Quaders, die andere entspricht dem Umfang der Grundfläche. Wenn man jetzt also den Flächeninhalt des Mantels durch den Umfang der Grundfläche dividiert, erhält man somit die Höhe des Quaders.

Moritz:

$$\begin{aligned}O &= 2ab + 2ah + 2bh \\O - 2ab &= h \cdot (2a + 2b) \\h &= \frac{O - 2ab}{2a + 2b}\end{aligned}$$

Vergleiche, was Max und Moritz jeweils wissen und können müssen, um zu ihrer Lösung zu gelangen.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Von den Schülerinnen und Schülern sollte möglichst selbständig erkannt, jedenfalls aber internalisiert werden, dass man im einen Fall (*Max*) neben einem gewissen Kontextwissen auch über diverse geometrische Beziehungen und deren arithmetische Umsetzung Bescheid wissen muss, während man im anderen Fall (*Moritz*) nicht über geometrische Beziehungen nachdenken und Bescheid wissen muss, dafür aber Termstrukturen erkennen und diverse Umformungsregeln beherrschen muss, um zu einer Lösung zu gelangen.

Es sollte den Schülerinnen und Schülern klar werden und sein, dass die algebraische, vom geometrischen Kontext weitgehend abgelöste Vorgehensweise abstrakter (weil kontextbefreit), zugleich aber auch universeller einsetzbar ist.

Die über das vorliegende Einzelbeispiel hinausgehenden generellen Überlegungen sollten als kollektiv erarbeitetes Reflexionswissen den Schülerinnen und Schülern verfügbar bleiben.

Position im Unterricht

Um diese Reflexionsaufgabe einsetzen zu können, sollten die Schülerinnen und Schüler wissen, wie man den Oberflächeninhalt eines Quaders ermittelt und in der Lage sein, die im Fall von Moritz nötigen algebraischen Umformungen durchzuführen.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Je zwei Lernende machen sich gemeinsam Gedanken, welche Vorkenntnisse und Fertigkeiten Max und Moritz jeweils benötigen, um mittels ihrer Vorgehensweisen zur Lösung zu gelangen. Die Ergebnisse werden von der Lehrperson im Plenum gesammelt, besprochen und gegebenenfalls um weitere bedeutende Aspekte, die von den Schülerinnen und Schülern noch nicht genannt wurden, ergänzt.

EA-R4 „Rechnen mit algebraischen Zeichen“ (MA)

Aufgabenstellung

Rechnen mit algebraischen Zeichen

Étienne Bonnot de Condillac (1714-1780) schreibt zur Algebra (also dem Arbeiten mit mathematischen Variablen, Termen und Gleichungen) Folgendes:

„Das Rechnen und das Schließen mit algebraischen Zeichen erfordert fast kein Gedächtnis: die Zeichen stehen vor Augen, der Geist führt die Feder, und die Lösung findet sich mechanisch.“

(Zitiert

nach Schmitt, Oliver (2017): Reflexionswissen zur linearen Algebra in der Sekundarstufe II. Wiesbaden: Springer, S. 252)

- Was könnte Condillac mit diesem Zitat gemeint haben?
Wie würdet ihr dieses Zitat mit eigenen Worten ausdrücken?
Welche Besonderheiten sieht Condillac im Arbeiten mit algebraischen Zeichen?
- Erläutert, ob eure Erfahrungen mit der Algebra mit der Sichtweise von Condillac übereinstimmen, welchen Teilen des Zitates ihr zustimmt, bei welchen Teilen ihr anderer Meinung seid und warum.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die Reflexionsaufgabe sollte Schülerinnen und Schüler dazu veranlassen, über Condillacs und über ihre persönlichen Sichtweisen zu Charakteristika und Spezifika der Algebra nachzudenken (wichtiger Reflexionsprozess) und diese einander gegenüber zu stellen.

Globale Ideen der Algebra, also Generalisierung (allgemeine, kontextbefreite Darstellung von Sachverhalten und Beziehungen) und Beweglichkeit (durch Loslösen vom Kontext und regelhaftes Umformen), sollten anhand der Sichtweisen von Schülerinnen und Schülern nachhaltig (wichtiges Reflexionswissen!) herausgearbeitet werden.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte erst eingesetzt werden, wenn den Schülerinnen und Schülern der Umgang mit Elementarer Algebra gut vertraut ist (etwa 8. oder 9. Schulstufe).

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Diskussion im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bilden Gruppen zu drei bis vier Personen und denken über das Zitat und ihre eigene Position zu den Ansichten von Condillac nach. Die Lehrperson steuert die Zusammensetzung der Gruppen, um möglichst in jeder Gruppe mindestens eine Schülerin bzw. einen Schüler zu haben, von der bzw. von dem sie annimmt, dass sie bzw. er die Diskussion inhaltlich in Gang bringen und auch aufrechterhalten kann.

Im Anschluss werden die Interpretationen des Zitates von den Gruppen im Plenum vorgelesen und die Ergebnisse der Gruppenarbeiten diskutiert. Eine abschließende Zusammenstellung des Reflexionswissens zur Elementaren Algebra (einschließlich Generalisierung und Beweglichkeit) wird wohl die Lehrperson einbringen müssen.

EA-R5 „Formeln – wozu?“ (KO)

Aufgabenstellung

Formeln – wozu?

Formeln sind sowohl innerhalb der Mathematik als auch in ihren Anwendungen von großer Bedeutung. Im Mathematikunterricht habt ihr Formeln in vielen unterschiedlichen Zusammenhängen kennengelernt.

Wozu/Zu welchen Zwecken werden Formeln überhaupt verwendet?
Erläutere dies (auch) anhand von Beispielen.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Kontextorientierte Reflexion

Formeln sind einerseits komprimierte Darstellungen von Beziehungen zwischen quantitativen Größen, wobei die Abhängigkeit einer Größe von den jeweils anderen Größen betont wird.

Formeln können zugleich aber auch als Berechnungsvorschrift für eine quantitative Größe aus anderen quantifizierten Größen gesehen werden.

Regelmäßige Umformungen ermöglichen es, jede der vorkommenden Größen durch die jeweils anderen Größen auszudrücken und zu berechnen.

Es sollte hilfreich wie auch anschaulich sein, sich diese nicht ganz einfachen (abstrakten) Überlegungen/Einsichten anhand konkreter Beispiele (kollektiv) zu erarbeiten.

Bei dieser Reflexionsaufgabe geht es gleichermaßen um den Nachdenkprozess und um dessen Ergebnisse (Reflexionswissen).

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann eingesetzt werden, wenn die Schülerinnen und Schüler reichhaltige Erfahrungen mit Formeln gesammelt haben (ab 7. Schulstufe).

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler machen sich zunächst zu zweit Gedanken zum Arbeitsauftrag und verschriftlichen diese. Danach stellen sich je zwei Paare gegenseitig ihre Ideen vor und ergänzen ihre Verschriftlichungen. Es geht dabei darum, eine Vielzahl an Aspekten und möglichst illustrative Beispiele dazu zu finden. Es wird jeweils eine schriftliche Ausarbeitung pro Gruppe der Lehrperson abgegeben. Diese sichtet die Ideen und Beispiele der Schülerinnen und Schüler, ergänzt diese allenfalls und fertigt eine Zusammenstellung mit den wichtigsten Aspekten und passenden Beispielen an. Die Lehrperson bringt die Zusammenstellung für alle Schülerinnen und Schüler in die nächste Schulstunde mit. Anhand dieser Zusammenstellung werden die wichtigsten Aspekte und Beispiele im Plenum besprochen.

EA-R6 „Elementare Algebra – Ist das wichtig?“ (PE)

Aufgabenstellung

Elementare Algebra – Ist das wichtig? – Teil A

Du hast dich im Mathematikunterricht längere Zeit mit dem Thema Elementare Algebra beschäftigt und dazu viel gelernt.

Findest du, dass es für dich, für dein derzeitiges oder für dein späteres Leben, wichtig ist/war, Elementare Algebra zu lernen?

(Erläutere an konkreten Beispielen/Situationen warum bzw. warum nicht.)

Gib an, wie wichtig es dir persönlich ist, Elementare Algebra zu lernen bzw. gelernt zu haben: _____ Pkt. (0 Pkt. ... völlig unwichtig; 100 Pkt. ... besonders wichtig)

Elementare Algebra – Ist das wichtig? – Teil B

Sollen alle Schülerinnen und Schüler Elementare Algebra lernen?

(Erläutere an konkreten Beispielen/Situationen warum bzw. warum nicht.)

Gib an, wie wichtig es dir erscheint, dass alle Schülerinnen und Schüler Elementare Algebra lernen: _____ Pkt. (0 Pkt. ... völlig unwichtig; 100 Pkt. ... besonders wichtig)

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgaben

Persönlichkeitsorientierte Reflexion

Diese Reflexionsaufgaben sollten Anlass für einen wertenden „Rückblick“ auf die bis dahin gemachten Lernerfahrungen im Bereich der Elementaren Algebra verstanden werden. Dabei sollten sich die Schülerinnen und Schüler eigenständig Gedanken machen, was sie an diesem mathematischen Inhalt gegebenenfalls für sich oder auch für andere wichtig finden und ihre nachvollziehbar begründete Sichtweise mit jener ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler vergleichen.

Im Vordergrund stehen hier die individuellen Reflexionsprozesse, Reflexionsergebnisse anderer Schülerinnen und Schüler und deren Reflexion/Diskussion ergänzen die eigene Sichtweise.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgaben sollte man nach ausführlicher Behandlung des Themengebiets in der 6., 7., 8. oder 9. Schulstufe stellen, damit die Schülerinnen und Schüler auf möglichst breite Erfahrungen mit diesem Themenbereich zurückgreifen können.

Interessant könnte es auch sein, diese Reflexionsaufgaben in verschiedenen Schulstufen zu behandeln (zum Beispiel am Ende der 6. und 8. Schulstufe) um mögliche Entwicklungen beobachten zu können und zu reflektieren/thematisieren.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Beide Teile werden in schriftlicher Form in Einzelarbeit (zB als Hausübung) von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet. Die beiden Punktwertungen werden der Lehrperson abgegeben. Während der folgenden Gruppenarbeit überträgt die Lehrperson die Punktwertungen in eine Grafik.

In Kleingruppen (drei bis vier Personen) tauschen die Schülerinnen und Schüler ihre Argumente aus. Die eigenen Argumente können um individuell überzeugende Argumente anderer Gruppenmitglieder ergänzt werden. Jede Schülerin und jeder Schüler hält jene seiner Argumente, die er der Lehrperson mitteilen möchte, auf einem Kärtchen schriftlich fest, die Kärtchen werden der Lehrperson anonym übergeben.

Im Plenum beschreibt die Lehrperson auftretende Muster und Besonderheiten in der von ihr erstellten Grafik. Schülerinnen und Schüler können ihre Bewertungen erläutern.