

Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Arithmetik“

Materialien aus dem Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

AR-R1 „Römisches vs. Dekadisches Zahlensystem“ (MA)	3
AR-R2 „Rechnen mit Prozenten – wozu?“ (PE)	4
AR-R3 „Prozente – geht es auch ohne?“ (KO)	6
AR-R4 „Verwendung von Prozenten“ (MO)	8
AR-R5 „Multiplikation vergrößert – immer?“ (MA)	9
AR-R6 „Teilbarkeitsregeln“ (MA)	10

Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden **nicht direkt ablesbar** oder **unmittelbar einsichtig** sind.

Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über **mathematische Eigenschaften** mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) **und über mathematische Zusammenhänge** innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über **Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen**, vor allem aber **außermathematischen Situationen**.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über **Wirkungen** mathematischer Konzepte **in unserer Welt**.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken darüber, **welche Bedeutung** (Wichtigkeit, Relevanz) **die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat**.

AR-R1 „Römisches vs. Dekadisches Zahlensystem“ (MA)

Aufgabenstellung

Römisches vs. Dekadisches Zahlensystem

- Welche (wesentlichen) Unterschiede gibt es zwischen dem römischen Zahlensystem und dem bei uns gebräuchlichen dekadischen Zahlensystem?
- Welche Vorteile hat unser dekadisches Zahlensystem gegenüber dem römischen Zahlensystem? Zeige dies anhand von Beispielen.
- Gibt es auch Vorteile des römischen Zahlensystems? Wenn ja, welche?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Im Vordergrund stehen bei dieser Reflexionsaufgabe rationale Nachdenkprozesse, weniger deren Ergebnisse (Reflexionswissen).

Reflektieren zu Unterschieden, zB:

- vordergründig wohl die Schreibweise (Buchstaben vs. Ziffern) und die Anzahl der Zeichen sowie das Fehlen der Zahl 0; wesentlicher aber das Stellenwertsystem des bei uns gebräuchlichen Zahlensystems

Reflektieren zu Vorteilen des dekadischen Zahlensystems, zB:

- vor allem: komplexere (schriftliche) Rechnungen (leichter) durchführbar
- auch: meist kürzere Schreibweise; Größe der Zahl anhand der Anzahl der verwendeten Zeichen erkennbar; Wert einer Zahl direkt ablesbar (bei röm. Zahlen muss man addieren und gelegentlich auch subtrahieren)
- nicht auf natürliche Zahlen beschränkt
- auch (sehr) große Zahlen (Mio, Mrd) noch halbwegs übersichtlich darstellbar

Reflektieren zu Vorteilen des römischen Zahlensystems, zB:

- keine wesentlichen Vorteile
- von 1-30 kommt man mit 3 Zeichen aus; einfach(st)e Rechenoperationen (im Bereich von Addition und Subtraktion) manchmal einfacher als im dekadischen Stellenwertsystem

Position im Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler sollten die römische Zahlendarstellung bereits kennen und in der Lage sein, zwischen Darstellungen von Zahlen im römischen und dekadischen System zu wechseln. Vor- und Nachteile der römischen Zahlendarstellung sollten im Unterricht jedoch noch nicht thematisiert worden sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten zunächst allein und notieren ihre Antworten. Dafür sollte reichlich Zeit gegeben sein.

In Kleingruppen (drei bis vier Schülerinnen bzw. Schüler) werden die Ideen ausgetauscht, diskutiert und die wichtigsten Aspekte auf Kärtchen festgehalten.

Die Kärtchen werden von der Lehrperson eingesammelt, geclustert an eine Pinnwand geheftet und im Plenum besprochen; ergänzt wird nur, wenn Wesentliches fehlt.

AR-R2 „Rechnen mit Prozenten – wozu?“ (PE)

Aufgabenstellung

Rechnen mit Prozenten – wozu?

Zwei Schülerinnen bzw. Schüler (S1 und S2) unterhalten sich.

S1: Warum müssen wir in der Schule eigentlich Prozentrechnung lernen?

S2: Weil man das immer wieder braucht.

S1: Ich brauche das nie. Wo muss man schon selbst Prozente ausrechnen?

S2: Zum Beispiel beim Einkaufen.

S1: Wo muss man da was mit Prozenten rechnen?

S2: Wenn man zum Beispiel ein T-Shirt kauft und man bekommt 20 % Rabatt, dann kann man sich den neuen Preis ausrechnen.

S1: Naja, da braucht man aber nicht rechnen. Der neue Preis steht dann eh schon am Etikett.

S2: Ja schon, aber...

Führe den Dialog von S1 und S2 fort.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Persönlichkeitsorientierte Reflexion

Bei dieser Reflexionsaufgabe sollten die Schülerinnen und Schüler darüber nachdenken, wo/in welchen Situationen es vorteilhaft ist, wenn man Prozentrechnung beherrscht. Dabei sollten sich die Beispiele nicht auf das Einkaufen (Preisnachlass, Rabatte) beschränken, sondern auch anderen Kontexten (zB Statistik, Funktionen, Zinsrechnung etc.) entnommen werden.

Wesentlich erscheint, dass durch entsprechendes Nachdenken (Reflexionsprozesse) überzeugende Beispiele (für die Verwendung von Prozenten und das Rechnen damit) aus verschiedenen Bereichen gefunden werden (von denen sich einige eventuell als prototypisches Reflexionswissen verfestigen können). Es sollten aber auch schlüssige ablehnende Argumente gewürdigt werden.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe könnte man bereits im Rahmen der Einführung in die Prozentrechnung einsetzen (es ist anzunehmen, dass Schülerinnen und Schüler in diesem Fall auf außerschulische Erfahrungen mit Prozenten zurückgreifen werden). Man kann diese Reflexionsaufgabe aber auch abschließend als Reflexionsanlass im Rahmen einer Rückschau auf die Prozentrechnung einsetzen (Schülerinnen und Schüler werden in diesem Fall wohl vorwiegend auf Erfahrungen und Inhalte aus dem Mathematikunterricht zurückgreifen).

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Besprechung im Plenum

Zu Beginn der Arbeitsphase können von der Lehrperson Vorgaben zur gewünschten Länge des Dialogs gemacht werden.

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten diese Reflexionsaufgabe in Einzelarbeit, wofür ihnen ausreichend Zeit gegeben wird, und geben ihre schriftlichen Ausarbeitungen der Lehrperson ab.

Die Lehrperson kommentiert schriftlich diese Ausarbeitungen und erstellt eine Sammlung der von den Schülerinnen und Schülern genannten Aspekte. Diese Materialien werden in der folgenden Stunde ausgeteilt, die genannten Aspekte werden im Plenum mit den Schülerinnen und Schülern besprochen (Kommentare, Nachfragen, Konkretisierungen, Ergänzungen, ...).

AR-R3 „Prozente – geht es auch ohne?“ (KO)

Aufgabenstellung

Prozente – geht es auch ohne?

Wahlbeteiligung bei EU-Wahl überraschend hoch

Die Wahlbeteiligung in Österreich lag bei der Europawahl 2019 so hoch wie seit langem nicht mehr, nämlich bei 59,8 %. Auch innerhalb der Europäischen Union konnte ein Anstieg der Wahlbeteiligung verzeichnet werden. Sie lag bei 50,62 %.

(nach <https://europawahlergebnis.eu/nationale-ergebnisse/osterreich/2019-2024/>)

Die Sporthits der Jugendlichen

Eine Umfrage unter 865 Jugendlichen zwischen 15 und 26 Jahren ergab:

Das Sportumfeld ist stark von Individualsport geprägt: In der Hitliste der Sportarten liegen Laufen, Wandern und Walken mit 51 Prozent auf Platz eins. An zweiter Stelle liegt Krafttraining an Geräten (31 Prozent), gefolgt von Schwimmen (26 Prozent), Radfahren bzw. Mountainbiken (24 Prozent) und Ski-Lauf bzw. Snowboarden (20 Prozent).

(nach <https://www.askoe.at/de/aktuelles-infos/newsshow-startseite----ein-viertel-der-jugendlichen-fuehlt-sich-nicht-gesund>)

Eine Werbung für Media Markt preist Folgendes an:

Media Markt Mehrwertsteuer sparen – 16,67% Rabatt auf ALLES!



Eine **Wahnsinns-Aktion** hält der **Media Markt Onlineshop** für euch bereit – **am 1. & 2. Mai 2019 könnt ihr die Mehrwertsteuer auf alle lagernden Artikel sparen!**

Die -20 % MwSt-Aktion entspricht **16,67 % Rabatt vom Kaufpreis.**

(nach <https://www.sparhamster.at/media-markt-mehrwertsteuer-sparen/>)

- Überlege für jedes der drei angeführten Beispiele, wofür in dem Beispiel Prozente verwendet werden.
- Wie könnte man die Sachverhalte jeweils ohne Prozente ausdrücken?
- Welche Vorteile hat es in den jeweiligen Fällen, Prozente zu verwenden?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Kontextorientierte Reflexion

Diese Reflexionsaufgabe zielt darauf ab, dass Schülerinnen und Schüler über den Zweck und den Nutzen der Verwendung von Prozenten nachdenken und sich wesentliche Überlegungen auch merken (Reflexionswissen).

Wesentlich erscheint dabei, dass die Schülerinnen und Schüler (anhand der angeführten Beispiele) Prozente als vielseitig anwendbares Konzept zur Darstellung relativer Anteile/Häufigkeiten verstehen. Wenn dafür grundsätzlich auch andere Darstellungen (vor allem Bruchdarstellung, manchmal auch absolute Häufigkeiten) möglich wären, erweist sich

die Angabe von Prozenten als universelles und in den meisten Fällen auch als besonders handliches, übersichtliches und aussagekräftiges Konzept.

Position im Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler sollten im Mathematikunterricht schon erste Erfahrungen mit Anwendungsaufgaben zu Prozenten gesammelt haben. Danach, allenfalls auch erst im Rahmen einer Wiederholung der Prozentrechnung, ist diese Reflexionsaufgabe gut einsetzbar.

Vorschlag für eine Unterrichtsform

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler denken zunächst alleine über die Fragestellungen nach (und halten ihre Überlegungen schriftlich fest). Im Anschluss finden sich drei bis vier Schülerinnen und Schüler zusammen, diskutieren in der Kleingruppe ihre individuellen Überlegungen, einigen sich auf ein gemeinsames Ergebnis und halten dieses Gruppenergebnis auf einem Plakat fest. Die Gruppenergebnisse werden anschließend im Plenum präsentiert und diskutiert. Wichtiges Reflexionswissen wird von der Lehrperson (an der Tafel oÄ) festgehalten und von allen Schülerinnen und Schülern im Heft notiert.

Diese Zusammenstellung des Reflexionswissens kann später ergänzt werden.

AR-R4 „Verwendung von Prozenten“ (MO)

Aufgabenstellung

Verwendung von Prozenten

Passt die Verwendung von Prozenten im mathematischen Sinn bei den jeweiligen Situationen? Warum bzw. warum nicht?

- 56 % der 525 Schülerinnen und Schüler einer Schule besitzen ein oder mehrere Haustiere.
- Aus einem Interview mit einer Fußballerin: „Ich widme mich immer zu 110 % dem Fußball.“
- Die Anzahl der in Österreich 2017 neu zugelassenen SUVs hat gegenüber 2010 um 117 % zugenommen.
- Schlagzeile: „29 % der Schüler bekommen Nachhilfe“

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Diese Reflexionsaufgabe zielt darauf ab zu erkennen und zu wissen, dass das mathematische Konzept von Prozenten die Kenntnis des Grundwerts erfordert oder eine zumindest qualitative Vorstellung davon, worauf sich der Grundwert bezieht.

Intendiert ist somit ein solches, durch eigenständiges Nachdenken (Reflexionsprozess) entwickeltes Grundwissen (Reflexionswissen) über Prozente.

Position im Unterricht

Dieser Reflexionsanlass kann eingesetzt werden, sobald eine Grundvorstellung zum Prozentbegriff entwickelt wurde.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum

Diese Reflexionsaufgabe bearbeiten jeweils drei bis vier Schülerinnen und Schüler gemeinsam, diskutieren ihre Ansichten und einigen sich auf einen Gruppenbeschluss, den jede/r notiert. Ist bei einer Situation in der Gruppe keine Einigung erzielbar, so sollten die unterschiedlichen Positionen und deren Begründungen dargelegt werden.

Die Gruppenergebnisse werden im Plenum präsentiert und – allenfalls unter Beteiligung der Lehrperson – diskutiert. Wichtiges wird von allen notiert.

AR-R5 „Multiplikation vergrößert – immer?“ (MA)

Aufgabenstellung

Multiplikation vergrößert – immer?

Suzanna behauptet: „Wenn man zwei Zahlen miteinander multipliziert, so ist das Ergebnis größer als jede der beiden Zahlen.“

- In welchen Fällen stimmt diese Aussage?
- In welchen Fällen stimmt diese Aussage nicht?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler sollten angeregt werden, darüber nachzudenken, in welchen Fällen die gängige Vorstellung, dass das Produkt zweier Zahlen größer ist als jeder der beiden Faktoren, zutrifft und in welchen Fällen diese Vorstellung nicht zutreffend ist. Die Antworten werden davon abhängen, welche Zahlbereiche den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt sind.

Für die bekannten Zahlbereiche sollten jeweils alle Möglichkeiten gefunden werden und als Reflexionswissen nachhaltig verfügbar bleiben.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann jeweils nach Erarbeitung eines neuen Zahlbereichs eingesetzt werden (also auch mehrmals).

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in Kleingruppen (drei bis vier Schülerinnen und Schüler), besprechen ihre Ideen und halten diese schriftlich fest.

Eine Gruppe stellt ihre Ideen im Plenum vor. Schülerinnen und Schüler aus anderen Gruppen fragen nach bzw. ergänzen, die Lehrperson korrigiert gegebenenfalls. Eine strukturierte Sammlung der aufgabenrelevanten Diskussionsergebnisse wird von der Lehrperson an der Tafel o.Ä. festgehalten, die Schülerinnen und Schüler schreiben in ihren Heften mit.

AR-R6 „Teilbarkeitsregeln“ (MA)

Aufgabenstellung

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist durch 20 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 5 teilbar ist.
Ist eine Zahl auch dann durch 20 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 10 teilbar ist?
Erkläre warum bzw. warum nicht?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Bei dieser Reflexionsaufgabe wird intendiert, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass eine Zahl, die durch 2 und 10 teilbar ist, auch durch 20 teilbar sein kann – aber nicht muss, da 2 und 10 nicht teilerfremd sind. Konkrete Beispiele sollten angegeben werden.

Reflexionswissen (bezüglich der Teilbarkeit durch 20) ist hier von sehr untergeordneter Bedeutung, wesentlich ist der Reflexionsprozess sowie die dabei gewonnene Einsicht, dass (hinsichtlich Teilbarkeit) auch scheinbar Naheliegendes einer kritischen Prüfung bedarf.

Position im Unterricht

Den Schülerinnen und Schülern sollten die Teilbarkeitsregeln für 2, 4, 5 und 10 bereits bekannt sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Präsentation im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten zu zweit an der Fragestellung und halten ihre Ergebnisse schriftlich fest. Die Lehrperson sammelt die Ausarbeitungen ab, kommentiert diese schriftlich und gibt sie den Teams zur Kenntnisnahme zurück. Korrekte Erklärungen werden vom Team im Plenum vorgetragen. Eine von den Schülerinnen und Schülern ausgewählte Erklärung wird von allen schriftlich festgehalten.