

Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Integralrechnung“

Materialien aus dem Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

IR-R1 „Integral gleich null?“ (MA)	3
IR-R2 „Fläche, die zwei Funktionsgraphen einschließen“ (MA)	4
IR-R3 „Integral der Geschwindigkeit“ (MA, MO)	5
IR-R4 „Volumina von Rotationskörpern“ (MA, MO)	6
IR-R5 „Einkaufsverhalten“ (MO)	7
IR-R6 „Grenzkosten, Grenzerlös und Gewinn“ (MA, MO)	8
IR-R7 „Integralrechnung und ich“ (PE)	9

Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind.

Vier Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über mathematische Eigenschaften mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) und über mathematische Zusammenhänge innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen, vor allem aber außermathematischen Situationen.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken darüber, welche Bedeutung (Wichtigkeit, Relevanz) die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat.

IR-R1 „Integral gleich null?“ (MA)

Aufgabenstellung

Integral gleich null?

f ist eine integrierbare Funktion.

Unter welchen Bedingungen gilt $\int_a^b f(x) dx = 0$?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Wenn man bereits weiß, dass ein Integral positive wie auch negative Werte annehmen kann, dann sollte es Schülerinnen und Schülern nicht schwerfallen zu überlegen, dass es in $[a; b]$ Abschnitte geben kann, in denen das Integral positive Werte annimmt und solche, in denen das Integral negative Werte annimmt – und dass diese Werte in Summe null ergeben können. Dieser einfache Reflexionsprozess liefert ein sehr wichtiges Reflexionswissen.

Typisch für die Mathematik ist, dass man auch Grenzfälle ausloten will, darüber reflektiert. Entsprechendes Nachdenken kann hier Schülerinnen und Schüler – als kleine Mathematikerinnen und Mathematiker – die „trivialen“ Lösungen mit $f(x) = 0$ bzw. $a = b$ entdecken lassen.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte im Rahmen der Einführung in das bestimmte Integral eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler überlegen zunächst alleine Bedingungen, bevor sie in Kleingruppen (drei bis vier Personen) ihre Ideen sammeln, diskutieren, sich auf ein Gruppenergebnis einigen und dieses schriftlich festhalten.

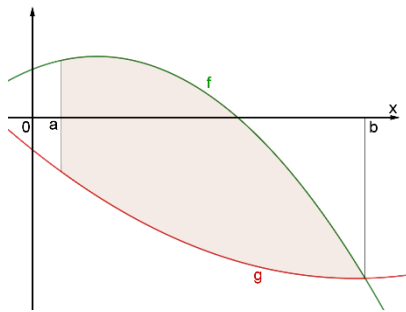
Die Gruppenergebnisse werden im Plenum vorgestellt. Die Lehrperson stellt sicher, dass alle relevanten Bedingungen zur Sprache kommen und von den Schülerinnen und Schülern schriftlich festgehalten werden.

IR-R2 „Fläche, die zwei Funktionsgraphen einschließen“ (MA)

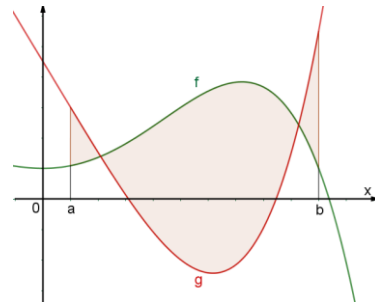
Aufgabenstellung

Fläche, die zwei Funktionsgraphen einschließen

Erläutere für die beiden dargestellten Fälle, wie man den Inhalt der Fläche, den die Graphen der Funktionen f und g im Intervall $[a; b]$ einschließen, bestimmen kann.



Fall 1



Fall 2

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

In dieser Reflexionsaufgabe geht es vor allem darum, dass die Schülerinnen und Schüler über Strategien für die Bestimmung des Inhalts der Fläche, die zwei Funktionsgraphen miteinander einschließen, nachdenken, verschiedene Ideen dafür entwickeln und sich deren Einsatzmöglichkeiten nachhaltig bewusst machen.

Somit geht es hier vorrangig um den Reflexionsprozess, dessen (Teil-)Ergebnisse (= Lösungsstrategien, insbesondere Translation) können als Reflexionswissen nützlich sein.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte im Rahmen der Flächenberechnung mit Hilfe des Integrals eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten diese Aufgabenstellung zuerst einzeln, anschließend in Gruppenarbeit (drei bis vier Personen). Sie einigen sich auf eine Argumentationslinie und halten das Gruppenergebnis auf einem Plakat fest. Die Plakate werden in der Klasse aufgehängt. Die Lehrperson korrigiert gegebenenfalls Fehler. Den Schülerinnen und Schülern wird Gelegenheit gegeben, die Plakate zu sichten und allfällige Unklarheiten mit anderen Schülerinnen und Schülern oder auch der Lehrperson zu klären.

IR-R3 „Integral der Geschwindigkeit“ (MA, MO)

Aufgabenstellung

Integral der Geschwindigkeit

v ist eine im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ integrierbare Geschwindigkeitsfunktion, d. h., $v(t_1)$ ist die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 , $v(t_2)$ entsprechend die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_2 .

Was bedeutet $\frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt}{t_2 - t_1}$? Begründe deine Antwort.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte und Modellorientierte Reflexion

Die Momentangeschwindigkeit als Ableitung der Zeit-Weg/Ort-Funktion ist den Schülerinnen und Schülern in der Regel aus der Differentialrechnung gut vertraut. Es sind eher einfache Nachdenkprozesse, die zur Umkehrung dieses Zusammenhangs und weiter – vielleicht etwas überraschend – zur Durchschnittsgeschwindigkeit führen.

Im Zentrum der Reflexion des Zusammenhangs „Momentangeschwindigkeit → Weg → Durchschnittsgeschwindigkeit“ steht die Interpretation des mathematischen Ausdrucks im außer-mathematischen Kontext als Prozess wie auch als dessen Ergebnis.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann eingesetzt werden, sobald den Schülerinnen und Schülern die Momentangeschwindigkeit sowie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bekannt ist.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler setzen sich in Kleingruppen (drei bis vier Personen) zusammen, bearbeiten gemeinsam die Aufgabenstellung und halten ihre Ergebnisse schriftlich fest. Im Anschluss daran findet eine Besprechung der Ergebnisse im Plenum statt.

IR-R4 „Volumina von Rotationskörpern“ (MA, MO)

Aufgabenstellung

Volumina von Rotationskörpern

Wenn sich der Graph einer Funktion f in einem Intervall $[a, b]$ um die x -Achse dreht, gilt für das Volumen V des entstehenden Rotationskörpers die Formel $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx$.

Erkläre, wie man zu dieser Formel kommt.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte und Modellorientierte Reflexion

Hier sollten Schülerinnen und Schüler über die Grundidee des Integrals als (salopp formuliert) „unendliche Summe von Produkten, bei denen jeweils ein Faktor unendlich klein ist“ sowie deren Anwendung auf die Berechnung der Volumina von Rotationskörpern nachdenken und ihre Reflexionsergebnisse zur begründeten Herleitung der Volumensformel und zu deren vertieften Verständnis einsetzen.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte im Rahmen von Anwendungen der Integralrechnung bearbeitet werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler machen sich in Kleingruppen (drei bis vier Personen) Gedanken zu dieser Aufgabenstellung. Ideen werden schriftlich festgehalten.

Zum Schluss erfolgt eine Besprechung der Gruppenergebnisse im Plenum. Eine gut verständliche Erklärung wird festgehalten.

IR-R5 „Einkaufsverhalten“ (MO)

Aufgabenstellung

Einkaufsverhalten

Manchmal werden diskrete funktionale Zusammenhänge durch stetige Funktionen modelliert.

Angenommen, man modelliert die Anzahl der Kundinnen und Kunden, die im letzten Monat in einem bestimmten Geschäft a Artikel kauften, durch die stetige Funktion $K: a \mapsto K(a)$. Man weiß, dass keine Kundin bzw. kein Kunde dieses Geschäfts im letzten Monat mehr als 100 Artikel käuflich erwarb.

Was bedeutet der Ausdruck $\frac{\int_1^{100} a \cdot K(a) da}{\int_0^{100} K(a) da}$ im vorliegenden Kontext? Erkläre dies.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierten Reflexion

Die hier intendierte Reflexion fokussiert auf ein Verständnis mathematischer Terme und deren angemessene Interpretation und Erläuterung in einem lebensweltlichen/wirtschaftlichen Kontext. Dabei steht der Reflexionsprozess im Vordergrund, das Ergebnis ist sekundär.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte im Rahmen von Anwendungen zum Integral eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten diese Aufgabenstellung in Kleingruppen (drei bis vier Personen) und halten ihre Ergebnisse in schriftlicher Form fest.

Die Lehrperson verschafft sich einen Überblick über die Gruppenergebnisse. Im Plenum stellt eine Gruppe, die die Aufgabe erfolgreich bearbeitet hat, ihr Ergebnis vor. Schülerinnen und Schüler anderer Gruppen (allenfalls auch die Lehrperson) fragen nach, kommentieren, korrigieren und bringen allenfalls andere Überlegungen in die plenare Diskussion ein.

IR-R6 „Grenzkosten, Grenzerlös und Gewinn“ (MA, MO)

Aufgabenstellung

Grenzkosten, Grenzerlös und Gewinn

Es sei $G(x_a)$ der Gesamtgewinn bei einer verkauften Menge x_a , K' ist die Grenzkostenfunktion, E' die Grenzerlösfunktion¹.

Gilt $G(x_a) = \int_0^{x_a} (E'(x) - K'(x)) dx$? Begründe deine Antwort.

¹ K' meint erste Ableitung der Kostenfunktion, E' erste Ableitung der Erlösfunktion.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte und Modellorientierte Reflexion

Intendiert werden hier Reflexionen über Zusammenhänge zwischen Gewinn, Erlös, Kosten (variable und fixe Kosten) sowie der Ableitungen von Erlös und Kosten und des Integrals von deren Differenz als auch Reflexionen über sinnvolle Interpretationen der mathematischen Zusammenhänge im wirtschaftlichen Kontext. Die Argumentation kann sowohl innermathematisch als auch im wirtschaftlichen Kontext erfolgen.

Die Aufgabe fokussiert auf entsprechende Reflexionsprozesse.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann im Rahmen von Anwendungen zum Integral eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten in Kleingruppen (drei bis vier Personen) diese Aufgabenstellung und halten ihre Ergebnisse in schriftlicher Form fest. Im Anschluss werden im Plenum die wichtigsten Aspekte innermathematischer Begründungen wie auch von Begründungen im wirtschaftlichen Kontext besprochen und verglichen.

IR-R7 „Integralrechnung und ich“ (PE)

Aufgabenstellung

Integralrechnung und ich

Seitens der vom Bildungsministerium eingerichteten Lehrplankommission ist geplant, die Integralrechnung aus den Lehrplänen der Gymnasien zu streichen. In den Medien wird darüber recht kontrovers diskutiert.

Schreibe einen Leserbrief für die Tageszeitung DER STANDARD, in dem du deine Argumente bezüglich dieses Vorhabens der Lehrplankommission darlegst.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Persönlichkeitsorientierte Reflexion

Das eigene Nachdenken über die persönliche Einschätzung der Integralrechnung als Themengebiet des Mathematikunterrichts und der kollektive Meinungs-austausch darüber in der Klasse, damit auch die Konfrontation der eigenen Meinung mit den ebenso wohl überlegten Meinungen anderer, kann ein wertvoller Reflexions- und Erfahrungsprozess sein. Er kann zugleich auch der Lehrperson Hinweise darauf geben, in welcher Weise ihre unterrichtlichen Bemühungen in diesem Themenbereich von den Schülerinnen und Schülern (nicht) aufgenommen wurden.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte am Ende des Themenbereichs „Integralrechnung“ eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten in Einzelarbeit im Rahmen einer Hausübung die Aufgabenstellung. Den Leserbrief schicken sie als E-Mail an die Lehrperson. Die Lehrperson sichtet die Beiträge und überlegt eine Gruppeneinteilung so, dass Schülerinnen und Schüler mit möglichst heterogenen Meinungen und Argumenten zusammenarbeiten (ca. fünf Personen pro Gruppe).

In der folgenden Unterrichtsstunde werden in jeder Gruppe die Leserbriefe der Gruppenmitglieder vorgelesen und diskutiert. Ein Gruppensprecher/eine Gruppensprecherin berichtet im Plenum vom Verlauf der Gruppendiskussion, Anmerkungen und Nachfragen sind möglich.