

**Reflexionsaufgaben zum Themenbereich
„Differentialrechnung
in der Wirtschaftsmathematik“**

**Materialien aus dem Projekt
„Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“**

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

DRW-R1 „Grenzkosten“ (MA, MO)	3
DRW-R2 „Zusammenhang zwischen Grenzkosten und Stückkosten“ (MA, MO)	4
DRW-R3 „Erlös eines monopolistischen Anbieters“ (MA, MO)	6
DRW-R4 „Zusammenhänge in der Kosten- und Preistheorie“ (MA, MO)	7

Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind.

Vier Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über mathematische Eigenschaften mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) und über mathematische Zusammenhänge innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen, vor allem aber außermathematischen Situationen.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken darüber, welche Bedeutung (Wichtigkeit, Relevanz) die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat.

DRW-R1 „Grenzkosten“ (MA, MO)

Aufgabenstellung

Grenzkosten

Grenzkosten werden in der Wirtschaftsmathematik als Änderungsrate der Gesamtkosten definiert. Im wirtschaftspraktischen Kontext werden sie in der Regel jedoch als Kostenzuwachs bei Produktionssteigerung um eine Mengeneinheit interpretiert.

Was meinst du dazu?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte und Modellorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler sollten erkennen und erläutern, dass der theoretische Begriff der Grenzkosten (Änderungsrate) durch den anschaulich besser erfassbaren Begriff der mittleren Änderungsrate (in einer kleinen Umgebung) für wirtschaftspraktische Überlegungen meist hinreichend genau erfasst wird.

Es sollte ihnen im kollektiven Meinungsaustausch klar werden, dass die Änderungsrate/Differentialquotient innerhalb der (Wirtschafts-)Mathematik einige Vorteile hat („Tools“ der Differentialrechnung), die Interpretation als mittlere Änderungsrate/Differenzenquotient hingegen in der Regel für (wirtschafts-)praktische Überlegungen und Formulierungen vorteilhafter ist.

Der erforderliche Reflexionsprozess ist zweifellos anspruchsvoll, interessant und lehrreich, das Ergebnis sollten Schülerinnen und Schüler – in allgemeiner Form als Gegenüberstellung von Differentialquotient und Differenzenquotient – als überaus wichtiges (Reflexions-)Wissen nachhaltig verfügbar haben.

Position im Unterricht

Diese Aufgabenstellung kann im Rahmen der Einführung des Begriffs Grenzkosten verwendet werden. Sollte es im Unterricht kein eigenes Kapitel zur Wirtschaftsmathematik geben, könnte die Aufgabe im Rahmen der Interpretation von Differentialquotienten in unterschiedlichen Kontexten eingesetzt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zunächst in Einzelarbeit die Aufgabenstellung, anschließend diskutieren sie in Kleingruppen (drei bis vier Personen) ihre Ideen. Die Gruppe einigt sich auf jene Ideen, die sie schriftlich festhalten möchte und notiert diese.

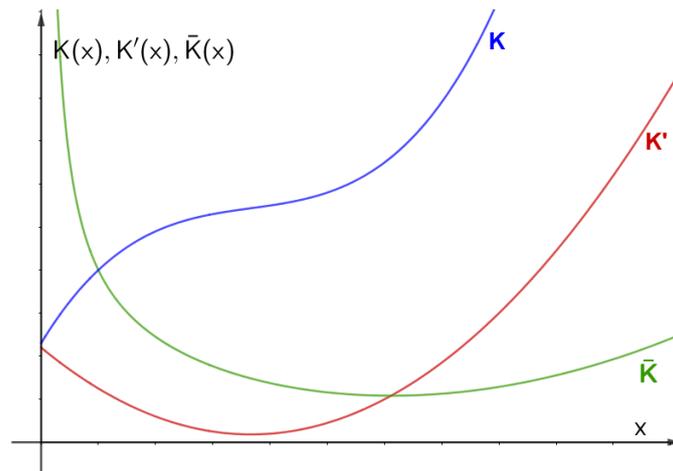
Im Plenum stellt eine Gruppe ihre Überlegungen vor, Schülerinnen und Schüler anderer Gruppen (allenfalls auch die Lehrperson) fragen nach, kommentieren und bringen allenfalls andere Überlegungen in die plenare Diskussion ein. Abschließend ergänzen, modifizieren und finalisieren die Gruppen ihr verschriftlichtes Gruppenergebnis.

DRW-R2 „Zusammenhang zwischen Grenzkosten und Stückkosten¹“ (MA, MO)

Aufgabenstellung

Zusammenhang zwischen Grenzkosten und Stückkosten

In der Abbildung sind eine Gesamtkostenfunktion K , sowie die zugehörige Grenzkostenfunktion K' und die zugehörige Stückkostenfunktion \bar{K} dargestellt.



Das Betriebsoptimum liegt an jener Stelle, an der die Grenzkostenfunktion die Stückkostenfunktion schneidet. Wie lässt sich dies

- mathematisch
- im wirtschaftlichen Kontext

erklären?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte und Modellorientierte Reflexion

Bei der mathematischen Erklärung kann sich die Reflexion auf einen entsprechenden Beweis, ausgehend von der Definition des Betriebsoptimums, beschränken. Im Detail erfordert dies jedoch mehrere Reflexionsschritte bezüglich Stückkostenfunktion und deren Minimum, Quotientenregel der Ableitung, algebraische Umformungen, ... und deren zielgerichtetes Zusammenwirken.

Eine Erklärung im wirtschaftlichen Kontext erfordert ein Nachdenken über die wirtschaftliche Interpretation mathematischer Sachverhalte: Wie entwickeln sich die Stückkosten in einem Bereich, in dem die Kostenzunahme bei Produktionserhöhung um ein Stück (= wirtschaftspraktische Interpretation der Grenzkosten) geringer sind als die jeweiligen Stückkosten?

Im Vordergrund sollten die erforderlichen Reflexionsprozesse stehen, die Ergebnisse (=mathematische bzw. wirtschaftliche Erklärung) sind dann weit weniger relevant.

¹ Idee: Kronfellner, M. & Peschek, W. (1997). *angewandte mathematik 3*. Hölder-Pichler-Tempsky: Wien, S. 189.

Position im Unterricht

Vor Einsatz dieser Reflexionsaufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler den Begriff der Grenzkosten(funktion) sowie das Betriebsoptimum als Minimum der Stückkosten(funktion) kennen.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten in Kleingruppen (drei bis vier Personen) diese Aufgabenstellung und halten ihre Erklärungen in schriftlicher Form fest. Diese Ausarbeitungen werden von der Lehrperson abgesammelt und gesichtet. In der folgenden Stunde werden von ihr im Plenum die schriftlichen Ausarbeitungen kommentiert und die wichtigsten Aspekte besprochen.

DRW-R3 „Erlös eines monopolistischen Anbieters²“ (MA, MO)

Aufgabenstellung

Erlös eines monopolistischen Anbieters

Ein monopolistischer Anbieter erhöht den Verkaufspreis seiner Ware und stellt erfreut fest, dass der wöchentliche Erlös seit der Preiserhöhung merklich gestiegen ist.

Durch diese Erfahrung motiviert, erhöht er den Verkaufspreis nochmals – und stellt zu seiner Überraschung wie auch Verärgerung fest, dass sein wöchentlicher Erlös nun wieder gesunken ist und jetzt sogar unter dem Wert vor der ersten Preiserhöhung liegt.

Wie lässt sich diese erstaunliche Entwicklung des Erlöses erklären?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte und Modellorientierte Reflexion

Um zu einer plausiblen Erklärung zu kommen, muss man sich Klarheit über den Einfluss des Preises und der nachgefragten Menge (in Abhängigkeit vom Preis) auf den Erlös verschaffen und wird berücksichtigen müssen, ob die relativen Veränderungen der Nachfrage stärker oder schwächer sind als jene des Verkaufspreises (Preiselastizität der Nachfrage).

Für einen zielführenden Reflexionsprozess gibt es bei dieser Aufgabe nicht allzu viel Spielraum. Allerdings lässt sich die Argumentation sowohl ökonomisch als auch sehr anschaulich mathematisch führen.

Im Vordergrund steht hier der Reflexionsprozess, adäquates Reflexionswissen (über die oben skizzierten Zusammenhänge) sollte aber durchaus auch von Interesse sein.

Position im Unterricht

Den Schülerinnen und Schülern müssen die Nachfrage- und die Erlösfunktion bekannt sein, bevor dieser Reflexionsanlass eingesetzt wird.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten in Kleingruppen (drei bis vier Personen) diese Aufgabenstellung und halten ihre Erklärungen in schriftlicher Form fest. Im Anschluss werden die Ergebnisse von der Lehrperson abgesammelt und gesichtet. Die Gruppen mit besonders gelungenen Ausarbeitungen präsentieren in der folgenden Stunde ihre Überlegungen im Plenum.

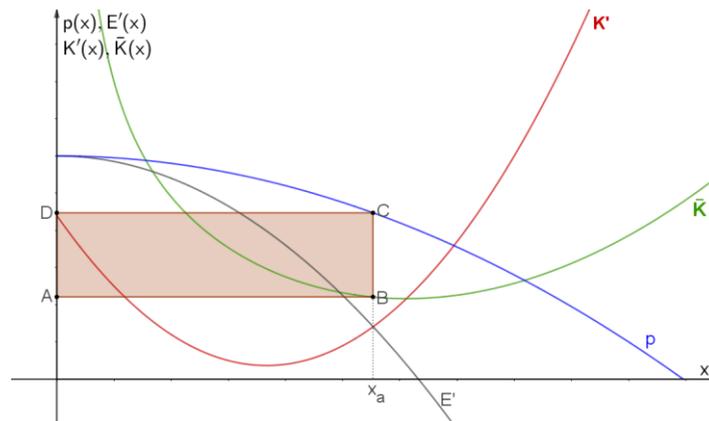
² Idee: Kronfellner, M. & Peschek, W. (1997). *angewandte mathematik* 3. Hölder-Pichler-Tempsky: Wien, S. 202ff.

DRW-R4 „Zusammenhänge in der Kosten- und Preistheorie“³ (MA, MO)

Aufgabenstellung

Zusammenhänge in der Kosten- und Preistheorie

In der Abbildung sind die Nachfragefunktion p , die Grenzerlösfunktion E' , die Grenzkostenfunktion K' und die Stückkostenfunktion \bar{K} dargestellt.



Der Flächeninhalt des dargestellten Rechtecks entspricht dem maximalen Gewinn. Wie lässt sich dieser Zusammenhang erklären?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte und Modellorientierte Reflexion

In mehreren Reflexionsschritten muss man sich über die Bedeutung von $p(x_a)$, der Rechteckseiten sowie des Schnittpunkts von E' und K' (im wirtschaftlichen Kontext) Klarheit verschaffen; die Reflexion fokussiert dabei vor allem auf Interpretation(en).

Wenn auch Teilergebnisse des Reflexionsprozesses von Interesse sein können, die zentrale Intention ist hier aber jedenfalls auf den Reflexionsprozess (bezüglich Interpretation mathematischer Sachverhalte/Beziehungen im außermathematischen Kontext) gerichtet.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann eingesetzt werden, sobald die in der Aufgabenstellung genannten Begriffe Nachfragefunktion, Grenzerlösfunktion, Grenzkostenfunktion und Stückkostenfunktion im Unterricht behandelt wurden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten in Kleingruppen (drei bis vier Personen) diese Aufgabenstellung und halten ihre Erkenntnisse in schriftlicher Form fest. Diese Ausarbeitungen werden von der Lehrperson abgesammelt und kommentiert. Gruppen mit besonders gelungenen Ausarbeitungen präsentieren diese in der folgenden Stunde im Plenum.

³ Idee: Kronfellner, M. & Peschek, W. (1997). *angewandte mathematik 3*. Hölder-Pichler-Tempsky: Wien, S. 207.