Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Differentialrechnung “

Materialien aus dem Projekt
„Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

Reflexion meint das …
… Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind.

Vier Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das **…**
… Nachdenken über mathematische Eigenschaften mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) und über mathematische Zusammenhänge innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das **…**
… Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen, vor allem aber außermathematischen Situationen.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das **…**
… Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das **…**
… Nachdenken darüber, welche Bedeutung (Wichtigkeit, Relevanz) die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat.

DR-R1 „Lokale und globale Extremstellen“ (MA)

Aufgabenstellung

Lokale und globale Extremstellen • Kann eine lokale Maximumstelle auch eine globale Maximumstelle sein? Erläutere deine Antwort (anhand von Beispielen). • Kann eine Funktion mehrere lokale bzw. mehrere globale Minimumstellen haben? Erläutere deine Antwort (anhand von Beispielen).

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler sollten über charakteristische/definitorische Eigenschaften von lokalen Extremwerten (keine größeren/kleineren Funktionswerte in einer Umgebung) und globalen Extremwerten (keine größeren/kleineren Funktionswerte in einem abgeschlossenen Intervall) Bescheid wissen, über Gemeinsamkeiten und Unterschiede selbst nachdenken und sich Situationen/Beispiele überlegen, bei denen ein lokaler Extremwert zugleich auch globaler Extremwert ist sowie Situationen/Beispiele, in denen eine Funktion mehrere lokale oder auch mehrere globale Extremwerte hat.

Wenn bei dieser Aufgabe auch die Reflexionsprozesse im Vordergrund stehen mögen, sollten die dabei gewonnenen und gesicherten Einsichten (Reflexionswissen) doch auch zu einem nachhaltig besseren/umfassenderen Verständnis lokaler und globaler Extremwerte beitragen.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann eingesetzt werden, sobald die Schülerinnen und Schüler Definitionen lokaler und globaler Extremstellen kennen.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum (Messebetrieb)

Die Schülerinnen und Schüler diskutieren in Kleingruppen (circa drei bis vier Personen) über die Fragestellungen und notieren ihre Gruppenergebnisse auf einem Plakat.

Die Plakate werden im Klassenzimmer aufgehängt, ein Gruppenmitglied bleibt (als Auskunftsperson) dort. (Die Gruppenmitglieder wechseln sich als Auskunftspersonen ab.)

Alle anderen Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrperson besuchen – wie in einer Messe – die Gruppenplakate. Kommentare, Ergänzungen, Korrekturen werden von den Auskunfts-personen notiert.

Anschließend wird das Gruppenplakat von der jeweiligen Gruppe finalisiert.

DR-R2 „Extremstelle?“ (MA)

Aufgabenstellung

Extremstelle?

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion.

- Begründe, warum $f'(x_0) = 0$ sein muss, wenn x_0 eine lokale Extremstelle der Funktion f ist.
- Begründe, warum x_0 keine lokale Extremstelle sein muss, wenn $f'(x_0) = 0$ ist.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler wissen meist, dass an einer lokalen Extremstelle x_0 f‘(x_0) = 0 sein muss, und sie wissen meist auch, dass f‘(x_0) = 0 eine zwar notwendige, aber keine hinreichende Bedingung dafür ist, da x_0 auch eine Sattelstelle sein kann.

Die Schülerinnen und Schüler sollten durch entsprechendes Nachdenken umfassende Begründungen (zB mit Monotonie) finden, warum an einer lokalen Extremstelle x_0 f‘(x_0) = 0 sein muss, und sie sollen herausfinden, dass sich anhand des Krümmungs- oder auch anhand des Monotonieverhaltens entscheiden lässt, ob tatsächlich eine Extremstelle (und welche) vorliegt oder eine Sattelstelle.

Reflexion wie (nachhaltig gesichertes) Reflexionswissen sind hier gleichermaßen von Bedeutung.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe kann eingesetzt werden, wenn den Schülerinnen und Schülern bekannt ist, dass $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an f an der Stelle x_0 angibt und sie eine definitorische Eigenschaft lokaler Extremstellen kennen.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler machen sich zunächst alleine Gedanken zu dieser Aufgabenstellung.

Danach setzen sie sich in Kleingruppen (drei bis vier Schülerinnen bzw. Schüler) zusammen, diskutieren ihre Überlegungen und halten die Ergebnisse ihrer Diskussion schriftlich fest.

Im Anschluss daran stellt eine Gruppe ihr Ergebnis im Plenum vor, die anderen Schülerinnen und Schüler fragen nach, kommentieren, ergänzen und korrigieren. Gruppen, die zu abweichenden Ergebnissen gekommen sind, stellen diese in gleicher Weise im Plenum zur Diskussion. Die Lehrperson bezieht Stellung und sichert unter Bezugnahme auf die Gruppenergebnisse ein Klassenergebnis.

DR-R3 „Sattelstelle?“ (MA)

Aufgabenstellung

Sattelstelle? Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion. Jemand behauptet, dass die Funktion f an der Stelle x_0 immer eine Sattelstelle hat, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ ist. Was meinst du dazu?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe
Mathematikorientierte Reflexion
Schon ein Beispiel einer Polynomfunktion f, für die trotz $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ die Stelle x_0 keine Sattelstelle ist, genügt, um die Behauptung zu widerlegen.
Die Schülerinnen und Schüler sollten durch Nachdenken (allenfalls Ausprobieren) herausfinden, dass Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^n$ mit geraden Hochzahlen an der Stelle $x_0 = 0$ eine lokale Extremstelle haben, während Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^n$ mit ungeraden Hochzahlen an der Stelle $x_0 = 0$ eine Sattelstelle haben.
Der Nachdenkprozess und die Art der Argumentation stehen hier im Vordergrund; die Erkenntnis, dass die Behauptung nicht zutrifft, wird man dem Grundwissen in der Differentialrechnung zurechnen.

Position im Unterricht
Es wird vorausgesetzt, dass den Schülerinnen und Schülern der Begriff „Sattelstelle“ bekannt ist.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf
Einzelarbeit, Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum
Die Schülerinnen und Schüler machen sich zunächst alleine Gedanken zu dieser Aufgabenstellung. Danach besprechen sie in Partnerarbeit ihre Überlegungen und halten diese schriftlich fest.
Ein Team stellt im Plenum seine Überlegungen zur Diskussion. Weitere Teams mit anderen Überlegungen folgen. Den Teams wird die Möglichkeit gegeben, ihre verschriftlichten Teamergebnisse aufgrund der Plenardiskussion zu überarbeiten.

DR-R4 „Momentangeschwindigkeit“ (MA, MO)

Aufgabenstellung

Momentangeschwindigkeit
Was stellst du dir unter Momentangeschwindigkeit vor?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte und Modellorientierte Reflexion

Die Intention dieses Reflexionsanlasses liegt darin, die Schülerinnen und Schüler anzuregen, über ihre eigenen Vorstellungen vom Begriff der Momentangeschwindigkeit genauer nachzudenken, sie zu konkretisieren und sie mit Vorstellungen anderer zu vergleichen.

Unabhängig davon, ob sich die Schülerinnen und Schüler dabei auf die Grenzwertdefinition berufen oder auf intuitive Vorstellungen, es sollte letztlich jedenfalls herausgearbeitet werden, dass es sich bei der Momentangeschwindigkeit um einen neuen, bislang nicht bekannten theoretischen Geschwindigkeitsbegriff handelt, für den es keine unmittelbare Entsprechung in der messbaren Umwelt gibt.

(Man kann danach auch darauf eingehen, dass solche Theoretizität auch bei anderen, durch Differentialquotienten definierten Begriffen – etwa Tangente, Grenzkosten, Stromstärke, Leistung, Temperaturgradient, … – in ähnlicher Weise vorliegt.)

Wichtig erscheinen hier die in den Reflexionsprozessen der Schülerinnen und Schüler herausgearbeiteten vielfältigen Vorstellungen bis hin zur Theoretizität (über deren Nützlichkeit und Unverzichtbarkeit hier oder auch an anderer Stelle ganz allgemein nachgedacht werden sollte).

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte eingesetzt werden, wenn die Schülerinnen und Schüler den Begriff der Momentangeschwindigkeit im Unterricht kennengelernt haben.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler machen sich zunächst alleine Gedanken zu dieser Fragestellung und halten ihre Überlegungen schriftlich fest.

In Gruppen zu vier oder fünf Personen tauschen sich die Schülerinnen und Schüler aus, dabei sollen unterschiedliche Vorstellungen herausgearbeitet und schriftlich festgehalten werden.

Im anschließenden Plenum präsentieren die Gruppen ihre (verschiedenen) Vorstellungen und stellen sie zur Diskussion. Die Lehrperson meldet sich zu Wort, wenn eine dieser Vorstellungen mit dem Konzept der Momentangeschwindigkeit völlig inkompatibel ist, allenfalls auch dann, wenn sie durch entsprechende Beispiele die Passung der Vorstellung kritisch beleuchten möchte.

DR-R5 „Freier Fall“ (MO)

Aufgabenstellung

Freier Fall

Der freie Fall wird mathematisch durch das Modell

$$s(t) = s_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$s_0 - Anfangshöhe\ (m); \quad g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2} - Erdbeschleunigung$$

beschrieben, wobei t die Zeit in Sekunden und $s(t)$ die Höhe, in der sich das Objekt zum Zeitpunkt t befindet, in Meter darstellt.

Beantwortet die in a) – c) gestellten Fragen

- im Rahmen des angeführten Modells
- für eure Einschätzung der Realität

und begründet eure Antworten.

a) Zwei Äpfel hängen in einem beliebigen Abstand übereinander an einem Baum. Beide Äpfel fallen gleichzeitig los. Verändert sich ihr Abstand beim Fallen?

b) Zwei Äpfel hängen in einem beliebigen Abstand versetzt übereinander an einem Baum. Der untere Apfel beginnt nun genau dann zu fallen, wenn der obere an ihm vorbeifliegt. Fallen sie ständig nebeneinander?

c) Es hängen ein Apfel und eine Feder nebeneinander an einem Baum. Beide lösen sich gleichzeitig vom Ast. Verändert sich ihr Abstand beim Fallen?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Bei dieser Reflexionsaufgabe geht es darum, außermathematische Situationen im Rahmen des idealisierten mathematischen Modells (quadratische Funktion) zu interpretieren und darüber nachzudenken, welche im Modell nicht berücksichtigten Faktoren in der Realität Auswirkungen auf die Beantwortung der Frage haben könnten.

Im Folgenden werden mögliche Argumente beispielhaft skizziert:

a) Nach dem Modell erfahren alle Objekte im freien Fall die gleiche Beschleunigung. Dies bedeutet, dass die Äpfel beim freien Fall den gleichen Abstand halten (bis der erste Apfel den Boden erreicht).
In der Realität kann die Situation anders sein: Falls die Äpfel die gleiche Form (und somit gleiche Wirkung des Luftwiderstandes) aber eine unterschiedliche Masse haben, wird der Abstand kleiner/größer, wenn der obere Apfel eine größere/kleinere Masse besitzt.

b) Wenn der obere Apfel am unteren vorbeifliegt, hat er schon eine gewisse Geschwindigkeit erreicht, deshalb fallen sie mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und damit nicht nebeneinander.
In der Realität können unterschiedliche Massen und Unterschiede hinsichtlich des Luftwiderstandes das Modellergebnis verändern, es ist jedoch praktisch ausgeschlossen, dass sie nebeneinander fliegen.

c) Im gegebenen Modell spielen die Masse und der Luftwiderstand keine Rolle, alle Objekte erfahren im freien Fall die gleiche Beschleunigung. Der Abstand der beiden Objekte ändert sich daher nicht.
In der Realität fällt der Apfel schneller als die Feder, weil er einerseits eine größere Masse hat, zum anderen aber auch, weil sich die Beschleunigung der Feder bei zunehmender Fallgeschwindigkeit aufgrund höheren Luftwiderstandes (im Verhältnis zur Masse größere Fläche) stärker verringert als jene des Apfels.

Das hier in einer konkreten Situation entwickelte (Reflexions-)Wissen kann hin und wieder in analogen Anwendungssituationen nützlich sein. Der Fokus dieser Aufgabe liegt aber vor allem bei den erforderlichen Reflexionsprozessen (mit denen man auch in ähnlichen Situationen erfolgreich sein kann).

Position im Unterricht

Für Begründungen innerhalb des mathematischen Modells ist es hilfreich auf die mathematischen Begriffe der Momentangeschwindigkeit und der Beschleunigung zurückgreifen zu können (siehe o. a. exemplarische Begründungen zu a)-c)).

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler machen sich zuerst zu zweit Gedanken zu diesen Aufgabenstellungen. Im Anschluss daran bilden je zwei Teams eine Vierergruppe, vergleichen ihre Ergebnisse und entwickeln eine Gruppenversion, die sie schriftlich festhalten.
Abschließend erfolgt eine Besprechung der Ergebnisse im Plenum: Je Fragestellung präsentiert jeweils eine Gruppe ihr Gruppenergebnis. Die anderen Schülerinnen und Schüler (gegebenenfalls auch die Lehrperson) kommentieren, ergänzen und korrigieren.

DR-R6 „Differentialrechnung unterrichten?“ (PE)

Aufgabenstellung

Differentialrechnung unterrichten? Stell dir vor, die Differentialrechnung soll aus dem Lehrplan der Oberstufe gestrichen werden. Gib mindestens zwei Pro- und zwei Contra-Argumente an, die dir besonders wichtig erscheinen.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Persönlichkeitsorientierte Reflexion

Durch diese Reflexionsaufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler angeregt werden, ihre persönliche Sicht zum Themenbereich Differentialrechnung darzulegen. Sie sollten überlegen, warum es nicht angemessen erscheint, dass alle Schülerinnen und Schüler der Oberstufe Differentialrechnung lernen müssen bzw. welche gewichtigen Argumente sie gegen eine Streichung der Differentialrechnung aus dem Lehrplan vorbringen würden.

(Zu guter Letzt könnte auch die Lehrperson ihre diesbezüglichen Überlegungen und Erfahrungen darlegen.)

Wichtig erscheinen bei dieser Reflexionsaufgabe vor allem die eigenen Nachdenkprozesse, aber auch die zu erwartende Vielfalt individuell unterschiedlicher Wertungen seitens der anderen Schülerinnen bzw. Schüler (und allenfalls der Lehrperson).

Position im Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler sollten sich für die Bearbeitung dieses Reflexionsanlasses bereits ausführlich mit der Differentialrechnung und deren Anwendungen beschäftigt haben.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler überlegen sich zuerst alleine Pro- und Contra-Argumente zu dieser Fragestellung und notieren diese. (Das kann auch in Form einer vorbereitenden Hausübung erfolgen.)

Sie setzen sich dann zu viert zusammen und sammeln in der Gruppe alle Argumente aus der Einzelarbeit. Sie einigen sich bei ähnlichen Argumenten auf eine gemeinsame Formulierung, schreiben alle Argumente, getrennt nach Pro und Contra, auf ein Plakat (ev. geben sie an, wie viele Personen der Gruppe, einem Argument zugestimmt haben) und hängen das Plakat im Klassenzimmer auf.

Die Lehrperson weist auf die Vielfalt der Argumente und auf die unterschiedlichen Argumentationsebenen hin, allenfalls könnte sie auch ihre eigenen Pro- und Contra-Argumente darlegen.