

Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Vektoren“

Materialien aus dem Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

| | |
|---|---|
| VE-R1 „Bestimmungsstücke von Vektoren in Anwendungen“ (MO, KO)..... | 3 |
| VE-R2 „Vektorieller Beweis des Satzes von Thales“ (MA)..... | 4 |
| VE-R3 „Ermittlung von Normalvektoren“ (MA)..... | 5 |
| VE-R4 „Parameterform der Geraden“ (MA) | 6 |
| VE-R5 „Ein Rechteck?“ (MA)..... | 8 |
| VE-R6 „Wozu Vektorrechnung lernen?“ (PE)..... | 9 |

Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind.

Vier Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über mathematische Eigenschaften mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) und über mathematische Zusammenhänge innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen, vor allem aber außermathematischen Situationen.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken darüber, welche Bedeutung (Wichtigkeit, Relevanz) die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat.

VE-R1 „Bestimmungstücke von Vektoren in Anwendungen“ (MO, KO)

Aufgabenstellung

Bestimmungstücke von Vektoren in Anwendungen

Ein Vektor wird durch seinen Betrag (= Länge), seine Richtung und seine Orientierung festgelegt.

Erläutere anhand zweier außermathematischer Beispiele die Bedeutung dieser Bestimmungstücke für die Modellierung mit Hilfe von Vektoren.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modell- und kontextorientierte Reflexion

Anhand dieser Aufgabe sollten die Lernenden darüber nachdenken, wie Vektoren mit ihren Bestimmungstücken für die Modellierung gewisser außermathematischer Anwendungen verwendet werden können (MO) und dabei zugleich die Nützlichkeit von Vektoren zur Bearbeitung von bestimmten Anwendungssituationen reflektieren (KO).

Im Fokus steht hier der Reflexionsprozess, Reflexionswissen über typische außermathematische Anwendungen (KO) kann aber ebenfalls nützlich sein.

Position im Unterricht

Für den Einsatz dieser Reflexionsaufgabe sollte den Schülerinnen und Schülern die Darstellung von Vektoren als Pfeile im Koordinatensystem vertraut sein, zudem sollte die Verwendung von Vektoren in zumindest einem weiteren Kontext bekannt sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Partner(innen)arbeit, Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum (Vernissage)

Zunächst sammeln die Schülerinnen und Schüler in Einzelarbeit außermathematische Beispiele, die durch Vektoren modelliert werden können.

Zu zweit einigen sie sich dann auf zwei dieser Beispiele, bearbeiten die Aufgabenstellung und halten ihre Ergebnisse schriftlich fest.

Anschließend bilden je zwei Paare eine Gruppe, tauschen ihre Ergebnisse aus, besprechen diese und geben sich gegenseitig Feedback dazu. In der Gruppe werden die ursprünglichen Ergebnisse der Paare überarbeitet und zusammengeführt (zB in einem Word-Dokument).

Die Lehrperson sichtet die Gruppenergebnisse und kommentiert diese. Bei negativen Kommentaren oder Fehlerkorrekturen werden die Gruppenprodukte (zB als Hausübung) noch einmal überarbeitet. Die korrekten Gruppenprodukte werden im Klassenzimmer (für etwa zwei Wochen) ausgestellt (zur Kenntnisnahme von und Diskussion zwischen den Schülerinnen und Schülern).

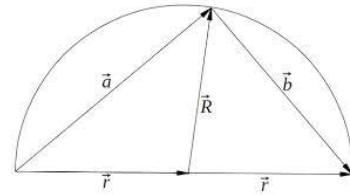
VE-R2 „Vektorieller Beweis des Satzes von Thales“ (MA)

Aufgabenstellung

Vektorieller Beweis des Satzes von Thales

Der Satz von Thales besagt, dass alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke rechtwinklig sind.

Beweise diesen Satz mit Hilfe von Vektoren!



Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Es geht bei dieser Aufgabe um die Reflexion einer zielführenden Kombination elementarer vektorieller Beziehungen und Sätze: Vektoren als Pfeile, Addition und Subtraktion von Vektoren/Pfeilen, Beträge von Vektoren, Normalvektoren wenn Skalarprodukt = 0.

Dieses Wissen muss vorausgesetzt werden.

Bei der Aufgabe geht es ausschließlich um den Reflexionsprozess, auf die Entwicklung von fachlichem Reflexionswissen wird nicht abgezielt.

Position im Unterricht

Zur Bearbeitung dieser Reflexionsaufgabe sollten die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, die Konzepte Vektoren als Pfeile, Beträge von Vektoren, Normalvektoren und Skalarprodukt sowie die Addition und Subtraktion von Vektoren operativ einzusetzen.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten diese Aufgabe zu zweit und halten ihre Ergebnisse möglichst nachvollziehbar fest. Die Lehrperson sichtet die Ergebnisse, gegebenenfalls kommentiert sie diese oder gibt eine kollektive Rückmeldung.

VE-R3 „Ermittlung von Normalvektoren“ (MA)

Aufgabenstellung

Ermittlung von Normalvektoren

Zu einem Vektor in \mathbb{R}^2 kann man durch Vertauschen der Elemente (Koordinaten) und einem Vorzeichenwechsel bei einem der beiden Elemente einen Normalvektor finden.

Erkläre dies für alle möglichen Fälle.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die Schüler(innen) können hier geometrisch überlegen, wobei Fallunterscheidungen für die unterschiedlichen Vorzeichen der beiden Elemente bedacht werden sollten.

Einfacher/effizienter überlegt bzw. erklärt man den Sachverhalt mit Hilfe der Formel für den Betrag eines Vektors sowie unter Verwendung des Satzes (bzw. der Definition), dass zwei Vektoren genau dann aufeinander normal stehen, wenn ihr Skalarprodukt null ergibt.

Es geht dabei wesentlich um den Reflexionsprozess, in dem in geeigneter Weise Vorwissen über Vektoren zielgerichtet kombiniert wird.

Position im Unterricht

Beim Einsatz dieser Reflexionsaufgabe muss den Schülerinnen und Schülern der Begriff Normalvektor bekannt sein, zudem sollten sie die Darstellung von Vektoren als Pfeile und/oder den Zusammenhang von Skalarprodukt und normal aufeinander stehenden Vektoren kennen.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Einzelarbeit (Nachbetrachtung)

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten diese Aufgabenstellung zu zweit und halten ihre Ergebnisse schriftlich und möglichst nachvollziehbar fest. Die Lehrperson sichtet die Ergebnisse und gibt eine kollektive Rückmeldung.

In Einzelarbeit folgt eine Nachschau bezogen auf den individuellen Reflexionsprozess, in der sich die Schülerinnen und Schüler mit Fragen wie den Folgenden auseinandersetzen: Wie unterscheidet sich meine/unsere Vorgangsweise von jener der anderen Paare? Wie erkläre ich mir diesen Unterschied? Was nehme ich von dieser Aufgabe für den weiteren Mathematikunterricht mit?

VE-R4 „Parameterform der Geraden“ (MA)

Aufgabenstellung

Parameterform der Geraden

Kevin ist allein zu Hause.

Und er ist verzweifelt, weil ihm aus diesem Grund niemand bei der Mathe-Hausübung helfen kann. Bei dieser Hausübung sollen Geraden, die in der Form $X = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ gegeben sind, im kartesischen Koordinatensystem eingezeichnet werden.

Für die erste Gerade gelingt Kevin das problemlos.

Die zweite Gerade unterscheidet sich von der ersten durch andere Werte für die Elemente von \vec{b} , in der Zeichnung ist aber kein Unterschied zu erkennen. 🤔 *Komisch!*

Auch bei der dritten Geraden sind die Werte der Elemente von \vec{b} von jenen in der ersten wie auch von jenen in der zweiten Gleichung verschieden – und jetzt zeichnet Kevin im Koordinatensystem tatsächlich eine andere Gerade. 👍 *Eben!*

Die vierte Gerade unterscheidet sich bei den Elementen von \vec{a} von jenen in der ersten Geraden, aber auch hier ist in der Zeichnung kein Unterschied zur ersten Geraden zu erkennen.

🤔 *Sehr komisch!*

Eine neuerliche Veränderung der Werte der Elemente von \vec{a} liefert aber dann doch eine andere Gerade. 👍 *Wusste ich doch!*

Jetzt will Kevin es endlich wissen: Obwohl für die Hausübung gar nicht erforderlich, zeichnet Kevin eine Gerade, die sich sowohl beim Vektor \vec{a} wie auch beim Vektor \vec{b} von den entsprechenden Werten bei der ersten Geraden unterscheidet. Aber siehe da: Es ist wieder dieselbe Gerade wie im ersten Fall. 🤔 *Da soll sich einer auskennen!*

Kevin versteht die (mathematische) Welt nicht mehr und ist verzweifelt.

Wie könntest du Kevin durch entsprechende Erklärungen helfen, seine Irritationen abzubauen?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Zunächst steht sicher der Reflexionsprozess ganz im Vordergrund: Welche Unterschiede beim Richtungsvektor \vec{b} können identische Gerade haben? Unter welchen Bedingungen können identische Gerade verschiedene Ortsvektoren \vec{a} haben?

Letztlich ist es aber auch sehr hilfreich, wenn man diese Bedingungen als Reflexionswissen nachhaltig verfügbar hat.

Position im Unterricht

Den Schülerinnen und Schülern sollte die Parameterdarstellung von Geraden bekannt sein. Spezifische Kenntnisse über Richtungs- und Ortsvektoren brauchen sie noch nicht, diese sollten vielmehr anhand der Reflexionsaufgabe durch Reflexion herausgearbeitet werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler beginnen mit der Bearbeitung der Aufgabe in Einzelarbeit, dafür sollte ausreichend Zeit gegeben werden, sodass sie sich mit mindestens der Hälfte der beschriebenen Situationen auseinandersetzen können.

In Kleingruppen zu dritt (falls notwendig zu zweit) tauschen sie sich über die bisherigen Ergebnisse aus, klären für sich die angegebenen Situationen und verfassen eine gemeinsame schriftliche Erklärung für Kevin.

Im Plenum wird zunächst die Erklärung einer Gruppe für alle sichtbar gemacht (zB mittels Dokumentenkamera, Overhead-Projektor oder Beamer) und die Gruppe stellt sich etwaigen Fragen und Kommentaren der anderen Schülerinnen und Schüler. Die anderen Gruppen machen reihum deutlich, inwiefern sich ihre Ergebnisse von denen der schon vorgestellten unterscheiden. Somit sollte eine Diskussion entstehen, in der alle Ergebnisse ausgetauscht, wo nötig relativiert und bewertet werden. Im Anschluss daran bringt sich die Lehrperson inhaltlich ein, wenn das nötig ist. Abschließend wird den Gruppen die Möglichkeit gegeben, ihre Erklärungen zu überarbeiten.

VE-R5 „Ein Rechteck?“ (MA)

Aufgabenstellung

Ein Rechteck?

Ein Viereck ist durch die Koordinaten seiner vier Eckpunkte gegeben.

Wie könnte man mit Hilfe von Vektoren rechnerisch überprüfen, ob es sich dabei um ein Rechteck handelt?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies zu überprüfen: Man kann gegenüberliegende Seiten auf Parallelität und die Diagonalen auf Längengleichheit überprüfen oder auch überprüfen, ob von den Seiten rechte Winkel eingeschlossen werden oder

Es geht hier um eher einfache Reflexionsprozesse entlang elementargeometrischer Eigenschaften von Rechtecken und deren vektorielle Überprüfung. Darüber hinaus gehendes Reflexionswissen scheint hier weniger relevant zu sein.

Position im Unterricht

Zur Bearbeitung dieser Reflexionsaufgabe sollte den Schülerinnen und Schülern die Darstellung von Vektoren als Pfeile, wie die Länge eines Vektors ermittelt wird und, dass das Skalarprodukt von Normalvektoren = 0 ist, bekannt sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Gruppenarbeit, ggf. Besprechung im Plenum

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten die Fragestellung zu zweit.

Anschließend finden sich je drei Paare in Gruppen zusammen und vergleichen und prüfen ihre Ergebnisse. Sollte am Ende der Gruppenarbeits-Phase innerhalb einzelner Gruppen noch Klärungsbedarf bestehen, kann dies im Plenum thematisiert werden.

VE-R6 „Wozu Vektorrechnung lernen?“ (PE)

Aufgabenstellung

Wozu Vektorrechnung lernen?

Wie interessant/uninteressant war es für dich, im Mathematikunterricht einiges über Vektoren und Vektoroperationen zu lernen, wie wichtig/unwichtig hältst du es persönlich, dass du einiges zu diesem Themenbereich gelernt hast? Begründe!

Hältst du es für wichtig, dass alle Schülerinnen und Schüler eines Gymnasiums einiges zur Vektorrechnung lernen? Warum?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Persönlichkeitsorientierte Reflexion

Es sollte hier auf frei und offen zur Diskussion gestellte Meinungsäußerungen besonderer Wert gelegt, alle ernsthaften Meinungen und gegenteilige Meinungen respektiert werden. Allein der Reflexionsprozess und der Austausch sowie die Diskussion unterschiedlicher Meinungen stehen hier im Fokus, Einfluss und Relativierungen der eigenen Meinung durch die Meinungen anderer sind aber durchaus erwünscht.

Position im Unterricht

Diese Reflexionsaufgabe sollte eingesetzt werden, wenn die unterrichtliche Behandlung der Vektoren in einem Schuljahr (vorerst) abgeschlossen ist.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum (ggf. mit Punktabfrage)

Die Schülerinnen und Schüler beantworten die Fragen zunächst für sich selbst schriftlich, dafür sollte ausreichend Zeit zur Verfügung stehen.

In Gruppen (zu ca. fünf Personen) tauschen sie sich darüber aus und erstellen eine Zusammenschau über die in ihrer Gruppe vorkommenden Positionen und Argumente, dabei werden auch Mehrfachnennungen gekennzeichnet.

Im Plenum wird zunächst die erste Frage besprochen, eine Gruppe beginnt mit ihrer Zusammenschau, die weiteren Gruppen machen deutlich, wo ihre Positionen ähnlich sind und ergänzen gegebenenfalls weitere Positionen. Danach wird die zweite Frage auf dieselbe Weise besprochen.

Im Anschluss könnten noch individuelle Positionierungen in einer Punktabfrage sichtbar gemacht werden. Dazu werden die Schülerinnen und Schüler gebeten, sich bezüglich Wichtigkeit/Unwichtigkeit für sich persönlich und für alle Gymnasiastinnen und Gymnasiasten auf jeweils einer Skala von 0 bis 100 zu positionieren. Diese beiden Koordinaten werden von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler in einem Koordinatensystem visualisiert. Das sich ergebende Bild kann von der Lehrperson oder einer Schülerin bzw. einem Schüler im Plenum analysiert werden.