

Reflexionsaufgaben zum Themenbereich „Wahrscheinlichkeit“

Materialien aus dem Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“

entwickelt und herausgegeben vom Projektteam:

Edith Schneider (Projektleitung)
Maja Četić, Kora Deweis-Weidlinger, Bernhard Kröpfl,
Tamara Obereder, Werner Peschek, Cornelia Plunger

**Bei Verwendung oder Weitergabe der Materialien
ist eine Angabe der Quelle erforderlich.**

Institut für Didaktik der Mathematik
Austrian Educational Competence Centre - Mathematics (AECC-M)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

April 2024

Inhalt

WR-R1 „Binomialverteilung bei Meinungsbefragung“ (MO)	3
WR-R2 „Empirisches Gesetz der großen Zahlen“ (MA)	4
WR-R3 „Symmetrisches Intervall“ (MA)	5
WR-R4 „Aufdecken mit Stochastik“ (MO)	6
WR-R5 „Wozu Wahrscheinlichkeit?“ (KO)	7
WR-R6 „Was macht das Empirische Gesetz der großen Zahlen so bedeutsam?“ (KO).....	8
WR-R7 „Pro und Kontra Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (PE)	9

Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind.

Vier Arten mathematischer Reflexion:

MA - Mathematikorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über mathematische Eigenschaften mathematischer Konzepte (math. Begriffe/Objekte, Darstellungen, Verfahren, Sätze u. Ä.) und über mathematische Zusammenhänge innerhalb solcher Konzepte oder auch zwischen diesen.

MO - Modellorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und innermathematischen, vor allem aber außermathematischen Situationen.

KO - Kontextorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt.

PE - Persönlichkeitsorientierte Reflexion meint das ...

... Nachdenken darüber, welche Bedeutung (Wichtigkeit, Relevanz) die Kenntnis mathematischer Konzepte und Inhalte/Themengebiete für einen selbst oder auch für bestimmte Gemeinschaften bzw. die Gesellschaft hat.

WR-R1 „Binomialverteilung bei Meinungsbefragung“ (MO)

Aufgabenstellung

Binomialverteilung bei Meinungsbefragung

Bei Meinungsbefragungen handelt es sich um ein „Ziehen ohne Zurücklegen“.

- Warum wird dennoch meist nicht mit der Hypergeometrischen Verteilung modelliert?
- Warum wird meist mit Binomialverteilung (oder auch Normalverteilung) modelliert?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Die Schülerinnen und Schüler sollten durch entsprechende Reflexion zunächst erkennen, dass/warum die Hypergeometrische Verteilung im Fall einer Meinungsbefragung etwas sperrig (kein Argument im Zeitalter von elektronischen Rechnern!) und oft auch aufgrund fehlender Informationen (zur Grundgesamtheit) gar nicht anwendbar ist.

Sie sollten weiters herausfinden (ev. anhand eines Beispiels zeigen), dass und begründen warum eine Modellierung mit der für Meinungsbefragungen an sich unpassenden Binomialverteilung für viele Meinungsbefragungen durchaus vertretbar ist.

Wichtiges Reflexionswissen ist, dass für eine brauchbare Approximation der Hypergeometrischen Verteilung durch eine Binomialverteilung die Stichprobe n im Verhältnis zur (großen) Grundgesamtheit g klein sein muss (die Faustregel $g > 60$, $n/g < 0,1$ wird wohl die Lehrperson beisteuern müssen); der Reflexionsprozess ist hier von etwas geringerer Bedeutung, ermöglicht aber einige Einsichten in diese beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen – und letztlich auch zur Modellbildung generell.

Position im Unterricht

Den Schülerinnen und Schülern müssen grundlegende Eigenschaften sowie die Berechnung von Werten der Hypergeometrischen Verteilung und der Binomialverteilung bekannt sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Die Aufgabenstellung wird in Kleingruppen (drei bis vier Personen) bearbeitet, die Überlegungen werden schriftlich festgehalten.

Die Lehrperson sammelt die Gruppenantworten ab, sichtet sie und geht in der folgenden Stunde im Plenum auf einzelne Antworten ein. Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten gemeinsam unter der Moderation und Mithilfe der Lehrperson eine finale Beantwortung der Aufgabenstellung.

WR-R2 „Empirisches Gesetz der großen Zahlen“ (MA)

Aufgabenstellung

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Das Empirische Gesetz der großen Zahlen besagt: *Mit zunehmender Anzahl der Durchführungen eines Zufallsversuchs stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines möglichen Ereignisses um einen festen Wert.*

Warum kann man für die Beschreibung „stabilisiert sich“ nicht den (mathematischen) Grenzwert verwenden?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Bei dieser Reflexionsaufgabe soll darüber nachgedacht werden, woran es liegt, dass man im vorliegenden Fall zur Beschreibung einer ‚Gesetzmäßigkeit‘ eine doch recht vage Vorstellung verwendet und nicht etwa den exakten mathematischen Grenzwertbegriff. Der Nachdenkprozess sollte also auf das Verhältnis von Zufall, Erfahrungstatsache und mathematischem Grenzwert fokussieren und diese Begriffe in ihrer Beziehung zueinander reflektieren.

Im Fokus dieser Reflexionsaufgabe steht zentral der Reflexionsprozess, das Reflexionswissen (keine Gesetzmäßigkeit sondern empirische Erfahrungstatsache, kein kontinuierliches Nähern erwartbar) ist von untergeordneter Bedeutung.

[*Hinweis:* Über diese Reflexionsaufgabe hinausgehend sollte man im Unterricht die große Bedeutung des Empirischen Gesetzes der großen Zahlen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung (und auch die Schließende Statistik) ansprechen: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung (wie auch die Schließende Statistik) baut darauf, in den Zufall doch eine gewisse Verlässlichkeit/Vorhersehbarkeit hinein zu bringen. Andernfalls wäre der Zufall mathematisch gar nicht bearbeitbar. In der Wahrscheinlichkeitstheorie erfolgt eine Formalisierung und Transformation des Empirischen Gesetzes der großen Zahlen zum („mathematischen“) Gesetz der großen Zahlen unter Verwendung des mathematischen Grenzwertbegriffs.]

Position im Unterricht

Vor dem Einsatz dieser Reflexionsaufgabe sollte das Empirische Gesetz der großen Zahlen im Unterricht bereits thematisiert und anhand unterschiedlicher Beispiele konkretisiert worden sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Die Bearbeitung der Aufgabenstellung erfolgt mit einer Partnerin bzw. einem Partner, die Antworten werden schriftlich festgehalten. Die Lehrperson sieht diese durch und bespricht die Ergebnisse im Plenum. Die Teams überarbeiten (sofern erforderlich) ihre Antworten aufgrund dieser Besprechung.

WR-R3 „Symmetrisches Intervall“ (MA)

Aufgabenstellung

Symmetrisches Intervall

Manchmal kennt man die relative Häufigkeit einer Merkmalsausprägung in der Grundgesamtheit und interessiert sich für ein Intervall, in dem die relative Häufigkeit dieser Merkmalsausprägung in einer Stichprobe mit (großer) Wahrscheinlichkeit γ auftritt. Es gibt viele solche Intervalle.

Warum ist man in der Regel an jenem Intervall interessiert, das symmetrisch um die relative Häufigkeit in der Grundgesamtheit liegt?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Mathematikorientierte Reflexion

Die Frage stellt sich (für Schülerinnen und Schüler) gelegentlich und ist anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilung recht elementar zu beantworten: Jedes andere Intervall ist breiter als das symmetrische Intervall um die relative Häufigkeit in der Grundgesamtheit.

Reflexionsprozess und Reflexionsergebnis, also Reflexionswissen um die Begründung für die Wahl des Intervalls („Schätzbereichs“), hängen hier unmittelbar zusammen und stehen beide im Fokus dieser Aufgabe.

[*Hinweis:* Die Aufgabe könnte auch für andere Parameter (zB absolute Häufigkeit, Mittelwerte) in gleicher Weise formuliert werden.]

Position im Unterricht

Die Aufgabenstellung sollte im Rahmen der Behandlung der o. g. Intervalle („Schätzbereiche“) behandelt werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Partner(innen)arbeit, Besprechung im Plenum

Die Aufgabenstellung wird zunächst von jedem Schüler bzw. jeder Schülerin alleine bearbeitet. Anschließend erfolgt ein Austausch der Antworten mit einem Partner bzw. einer Partnerin, von beiden geteilte Antworten werden schriftlich festgehalten. Die Lehrperson sichtet die Antworten und präsentiert im Plenum eine Zusammenstellung der wesentlichsten von den Schülerinnen und Schülern genannten Aspekte. Die Präsentation der Lehrperson wird besprochen, die Teams überarbeiten gegebenenfalls ihre Antworten.

WR-R4 „Aufdecken mit Stochastik“ (MO)

Aufgabenstellung

Aufdecken mit Stochastik

Erläutere, wie man mit den dir zur Verfügung stehenden stochastischen Mitteln Hinweise bekommen könnte, ob Wahlberechtigte, die der letzten Wahl ferngeblieben sind, dies auch zugeben.

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Modellorientierte Reflexion

Es sollte von den Schülerinnen und Schülern erkannt werden, dass eine (wahrscheinlichkeitsbasierte) Beantwortung dieser – zugegeben recht ungewöhnlichen – Fragestellung lediglich die direkte Anwendung des Konzepts des Schätzbereichs (symmetrisches Intervall um den interessierenden Parameter der Grundgesamtheit) erfordert. Es muss bei diesem Reflexionsanlass von den Schülerinnen und Schülern somit über ein geeignetes Konzept zur Bearbeitung dieser Frage nachgedacht, ein solches gefunden und in einer ungewohnten Situation angemessen eingesetzt und interpretiert werden.

Es ist dies eine für die Anwendung von Mathematik in nicht vertrauten Zusammenhängen recht typische Reflexion und Vorgehensweise. Das Reflexionsergebnis selbst, also das Reflexionswissen, ist von deutlich geringerer Bedeutung.

[*Hinweis:* Man könnte alternativ auch nach Wahlberechtigten fragen, die ungültig oder die XPÖ ... gewählt haben.]

Position im Unterricht

Den Schülerinnen und Schülern müssen der Schätzbereich und seine Interpretation bekannt sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Gruppenarbeit, Präsentation im Plenum

Die Aufgabenstellung wird in Gruppen aus vier Personen bearbeitet. Jede Gruppe erstellt ein Plakat mit ihrem Konzept. Die Plakate werden von den einzelnen Gruppen im Plenum präsentiert. Die übrigen Schülerinnen und Schüler, bei gravierenden Fehlern auch die Lehrperson, kommentieren die vorgestellten Konzepte.

WR-R5 „Wozu Wahrscheinlichkeit?“ (KO)

Aufgabenstellung

Wozu Wahrscheinlichkeit?

Was wäre, wenn es das mathematische Konzept der Wahrscheinlichkeit nicht gäbe?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Kontextorientierte Reflexion

Schülerinnen und Schüler sollten sich klar machen, dass die mathematische Wahrscheinlichkeit das scheinbar Unmögliche in bestimmter Hinsicht ermöglicht, nämlich den Zufall berechenbar macht. Ohne die Wahrscheinlichkeit gäbe es keine quantitativen Aussagen zur Gewinnwahrscheinlichkeit bei Glücksspielen, keine Aussagen zur Sicherheit von Schaltkreisen oder Atomreaktoren, keine Wahrscheinlichkeitsaussagen zur Wirksamkeit von Impfungen oder zu Nebenwirkungen, keine quantitativen Prognosen der Meteorologinnen und Meteorologen zur Regenwahrscheinlichkeit in den nächsten Tagen, keine Schätzung von Stichprobenparametern bei bekannten Parameterwerten in der Grundgesamtheit, keine Tests von Hypothesen, keine (Wahl-)Hochrechnungen etc. etc.

Schülerinnen und Schüler sollten einige solcher Beispiele als – in Nachdenkprozessen selbst entwickeltes – Reflexionswissen nachhaltig zur Verfügung haben.

Position im Unterricht

Es empfiehlt sich, diese Reflexionsaufgabe erst einzusetzen, wenn die Schülerinnen und Schüler im Unterricht schon vielfältige Erfahrungen mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff (und seinen diversen Interpretationen) machen konnten. Vielfältig meint dabei, dass sich diese Erfahrungen nicht auf die „Glückspielmathematik“ beschränken sollten, sondern vor allem auch anhand relevanterer Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (und idealerweise auch der Schließenden Statistik) gemacht wurden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit

Zunächst setzen sich die Schülerinnen und Schüler in Einzelarbeit mit der Fragestellung auseinander. In Gruppen (ca. drei Personen) tauschen sie sich aus und halten ihre Ergebnisse schriftlich fest. Die Lehrperson sichtet die Ergebnisse und gibt eine kollektive Rückmeldung. Die Gruppen überarbeiten bzw. ergänzen ihre schriftlichen Gruppenergebnisse.

WR-R6 „Was macht das Empirische Gesetz der großen Zahlen so bedeutsam?“ (KO)

Aufgabenstellung

Was macht das Empirische Gesetz der großen Zahlen so bedeutsam?

Das Empirische Gesetz der großen Zahlen ist keine beweisbare mathematische Gesetzmäßigkeit, vielmehr handelt es sich dabei um eine immer wieder beobachtbare, wichtige Erfahrungstatsache.

Welche Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Schließende Statistik hätte es, wenn diese Erfahrungstatsache nicht bekannt wäre?

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Kontextorientierte Reflexion

Schülerinnen und Schüler sollten durch Reflexion herausfinden, dass es ohne diese Erfahrungstatsache weder eine frequentistische Interpretation der Wahrscheinlichkeit gäbe, noch einen Schätzbereich für relative Häufigkeiten (Schluss von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe), vor allem aber auch keine Hochrechnung für relative Anteile in der Grundgesamtheit (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit).

Damit würden einige ganz zentrale Konzepte der Stochastik fehlen. Diese im Idealfall durch eigene Reflexion der Schülerinnen und Schüler entwickelte Einsicht sollte als Reflexionswissen nachhaltig verfügbar sein.

Position im Unterricht

Wenn man nach Behandlung der klassischen Wahrscheinlichkeit die frequentistische Wahrscheinlichkeit behandelt, kann/wird man im Zusammenhang mit Letzterer das Empirische Gesetz der großen Zahlen thematisieren – und die damit herstellbare Verbindung zwischen Stichprobe und Grundgesamtheit. Wenn man dabei nicht schon zu viel verrät/vorwegnimmt, kann dies eine geeignete Stelle für den Einsatz dieser Reflexionsaufgabe sein.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Besprechung im Plenum

Zunächst bearbeiten die Schülerinnen und Schüler diese Fragestellung in Einzelarbeit.

In Gruppen (ca. 3 Personen) tauschen sie sich aus, und halten die Ergebnisse schriftlich fest. Sie dokumentieren auch, wo in der Gruppe Einigkeit und wo noch Klärungsbedarf besteht.

Im Plenum werden die Ergebnisse ausgetauscht, die Lehrperson bringt sich am Ende inhaltlich ein, wenn ihr dies notwendig scheint. Die Gruppen überarbeiten bzw. ergänzen gegebenenfalls ihr schriftliches Ergebnis.

WR-R7 „Pro und Kontra Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (PE)

Aufgabenstellung

Pro und Kontra Wahrscheinlichkeitsrechnung

In einer bekannten österreichischen Tageszeitung gibt es unter der Rubrik „KOMMENTAR“ hin und wieder „PRO-“ und „KONTRA-Statements“ zu einer aktuellen Aussage.

Schreibe deine PRO- und KONTRA-Argumente (jeweils max. 100 Wörter) zu folgender Aussage auf:

„WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG IST IN DER SCHULMATHEMATIK FEHL AM PLATZ“

Hinweise für die Lehrperson

Intention der Reflexionsaufgabe

Persönlichkeitsorientierte Reflexion

Bei dieser Reflexionsaufgabe geht es darum, sich bewusst relevante und vernünftige Argumente zu überlegen, die für oder gegen die unterrichtliche Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule sprechen.

Bedeutsam erscheinen dabei sowohl eine ernsthafte Auseinandersetzung mit eigenen Einschätzungen und deren rationaler Begründung (Reflexionsprozess), wie auch eine Konfrontation der eigenen Überlegungen (Reflexionswissen) mit jenen der Mitschülerinnen und Mitschüler, allenfalls auch mit jenen der Lehrperson.

Position im Unterricht

Die Aufgabenstellung sollte nach der unterrichtlichen Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (allenfalls auch der Schließenden Statistik) bearbeitet werden.

Ein Vorschlag für den Unterrichtsablauf

Einzelarbeit, Partner(innen)arbeit, Diskussion im Plenum

Die Aufgabenstellung wird zunächst von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler individuell bearbeitet, die Pro und Kontra sind schriftlich festzuhalten. (Dieser erste Arbeitsauftrag kann auch als vorbereitende Hausübung aufgegeben werden.)

Es werden Zweiertteams gebildet. In diesen Teams werden die schriftlichen Ausarbeitungen ausgetauscht und es wird zum Pro und zum Kontra beider Teammitglieder ausführlich diskutiert. Die Texte werden von der Lehrperson abgesammelt, gesichtet und einige ausgewählte in der folgenden Stunde im Plenum vorgelesen. Für eine Diskussion, an der sich auch die Lehrperson beteiligen kann, sollte ausreichend Zeit sein.